

**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності**

**Лозинський Р. Я.**

**ТЕПЛОФІЗИКА  
ТА ПОЖЕЖНА БЕЗПЕКА**

**Частина II. Теплопередача**

*Навчальний посібник*

**Львів  
2020**

УДК 697.98  
ББК 31+38  
Л 72

**Лозинський Р. Я. Теплофізика та пожежна безпека. Частина II. Теплопередача.** – Львів, 2020. – 112 с.

**Рецензенти:** *М. М. Семерак, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теплоенергетики, теплових і атомних електричних станцій Національного університету «Львівська політехніка»;*  
*В. В. Ковалишин, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*

В посібнику ґрунтовно розкриваються основи теплопередачі та їх використання в пожежній справі. Вказується методика розв’язування задач, конкретних тем, більшість яких складена автором і які стосуються практичної діяльності працівників оперативно-рятувальної служби.

Охоплюючи всі розділи теплопередачі посібник добре слугуватиме курсантам, студентам і слухачам закладів вищої освіти, які навчаються за спеціальностями «Пожежна безпека» та «Цивільний захист».

Рекомендовано до друку Вченою радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності для внутрішнього користування (протокол №2 від «30» вересня 2020р.)

© Лозинський Р. Я., 2020  
© ЛДУБЖД, 2020

## ВСТУП

Зважаючи на те, що технології виробничих процесів тісно перетинаються з науковими досягненнями, треба вважати, що теплопередача посідає чільне місце в комплексі тих дисциплін, які стають провідними. Справа в тому, що практично всі технологічні процеси відбуваються на засадах енергообміну, тобто енергообмін будь-яким способом (термічним, електромагнітним, механічним, хімічним, радіаційним тощо) є повселюдним явищем як в побуті, так і на виробництві. Тому потреба в посібнику, якщо ставити за мету навчити читача основам передачі теплової енергії та їх використання в пожежній справі, є доволі велика, оскільки бібліографія праць з цього предмета обмежена. Разом з тим термодинаміка і теплопередача належать до фундаментальних дисциплін і є основою для вивчення дисциплін пожежно-технічного профілю.

В цьому посібнику поєднуються теоретичні основи тем з теплопередачі та методика розв'язування задач з цих тем.

Курсантові (студентові, слухачеві) під час самостійного вивчення теми необхідно спочатку ознайомитись з теоретичним матеріалом, який викладено в посібнику, а потім вивчити методику розв'язування задач з цієї теми.

Задачі підібрані так, що дають можливість набути необхідних навиків у використанні загальних теорем і методів для розв'язування конкретних прикладних завдань. Автор намагався зробити викладення кожної конкретної теми незалежним від інших тем, що дозволяє читачеві здійснювати вибіркове вивчення окремих тем і методики розв'язування задач.

Посібник рекомендовано курсантам (студентам) вищих технічних навчальних закладів III-IV рівнів акредитації денної та заочної форм навчання, а також для самостійного вивчення основ теплопередачі та використання цих основ в пожежній справі.

# ЧАСТИНА II. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

## Тема 1. Основні положення

**Теплопередача** (теплообмін) – наука про незворотні процеси обміну енергією у вигляді теплоти між взаємодіючими макроскопічними елементами - термодинамічної системи в умовах, коли відсутня термічна рівновага. **Термічною рівновагою** називають стан термодинамічної системи в якій всі макроскопічні елементи системи мають однакову температуру.

Передача тепла відбувається від одного тіла до другого тільки при наявності різниці температур. У відповідності до **другого закону термодинаміки**: теплота сама по собі переходить від тіла з більш високою температурою до тіла з меншою температурою і не може самовільно рухатись в зворотньому напрямі. Якщо температура в тілі вирівнюється, то теплообмін припиняється і настає термічна рівновага. Отже, для теплообміну необхідна неоднорідність температурного поля.

**Температурним полем** тіла називають сукупність значень температури  $t$  у фіксований момент часу  $\tau$  для всіх точок простору, яке займає тіло, тобто температурне поле задається функцією, *наприклад*  $t = f(x, y, z, \tau)$ . Температурне поле називають **нестаціонарним**, якщо із плином часу воно змінюється, *наприклад*  $t = f(x, y, z, \tau)$ . Процеси теплопередачі, які відбуваються в нестаціонарному полі, називаються **нестаціонарними процесами**. Температурне поле називають **стаціонарним**, якщо із плином часу воно не змінюється, *наприклад*  $t = f(x, y, z)$ . Процеси теплопередачі, які відбуваються в стаціонарному полі, називаються **стаціонарними процесами**.

Температурне поле називають **одновимірним**, якщо зміна температури відбувається в одному напрямі, *наприклад*  $t = f(x, \tau)$ . Якщо температурне поле залежить від двох координат, то його називають **двовимірним**, *наприклад*  $t = f(x, y, \tau)$ . Аналогічно, температурне поле називають **тривимірним**, якщо воно залежить від трьох координат, *наприклад*  $t = f(x, y, z, \tau)$ .

**Ізотермічною поверхнею** називають поверхню в точках якої температура має однакове значення. Враховуючи другий закон термодинаміки можна твердити, що передача теплоти не може здійснюватись вздовж ізотермічних поверхонь. Передача теплоти може відбуватись лише від однієї ізотермічної поверхні до другої в сторону зменшення температури. Отже, при теплообміні потік теплоти перетинає ізотермічні поверхні. Теплоту  $q$ , яка передається за одиницю часу через одиницю площі ізотермічної поверхні, називають **густиною теплового потоку**, тобто

$$q = \frac{\partial^2 Q}{\partial F \partial \tau}. \quad (1)$$

Розмірність густини теплового потоку  $[q] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ .

Гradient температур характеризує нерівномірність розподілу температур в температурному полі. **Gradientом температур** називають границю

відношення зміни температури  $\Delta t$ , вздовж нормалі ізотермічної поверхні, до величини віддалі  $\Delta n$  на якій фіксується ця зміна температур, коли  $\Delta n \rightarrow 0$ , тобто

$$q_{\text{рад}t} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{dt}{dn}. \quad (2)$$

Фізичний зміст градієнта температур – це приріст температури в градусах на одиницю довжини вздовж нормалі до ізотермічної поверхні.

Теорія теплопередачі є одним із розділів термодинаміки незворотніх процесів. В теорії теплопередачі вважається, що:

- речовина розглядається як суцільне неперервне середовище;
- механізм передачі теплоти від однієї частини тіла до іншої не розглядається на мікроскопічному рівні;
- теорія теплопередачі базується на законах, встановлених експериментальним шляхом;
- розглядається три види теплопередачі: теплопровідність, конвекційний теплообмін та теплове випромінювання.

**Теплопровідність** – це процес передачі енергії від більш нагрітої частини твердого тіла до менш нагрітої частини тіла, зумовлений хаотичним рухом мікрочастин за умови відсутності макроскопічного руху одних частин тіла відносно інших.

**Конвекційний теплообмін** – це процес, зумовлений сумісною дією конвекції теплоти і теплопровідності. **Конвекцією теплоти** називають процес переносу теплоти шляхом переміщення рідини або газу в просторі з однієї області та певною температурою, в іншу частину простору, з іншою температурою. При неоднорідному температурному полі потоку рухомого середовища між його сусідніми макрочастинами відбувається теплообмін шляхом теплопровідності. З багатьох задач конвекційного теплообміну найбільш практичний інтерес викликає задача про теплообмін між рухомою рідиною (газом) і поверхнею тіла. **Тепловіддачею** (теплообміном) називається явище теплообміну між рухомим середовищем і поверхнею, вздовж якої рухається середовище. Інтенсивність теплообміну характеризується коефіцієнтом теплообміну (тепловіддачі). Розглянемо деяку тверду поверхню площею  $F$ , вздовж якої ковзає рідина (газ). Позначимо температуру поверхні тіла  $t_m$ , а температуру потоку рідини –  $t_p$ . Виокремимо на поверхні елемент площею  $\partial F$ . За відсутності теплової рівноваги, тобто  $t_m \neq t_p$ , через елемент поверхні  $\partial F$  за час  $\partial \tau$  проходить деяка кількість теплоти, котру позначимо  $\partial^2 Q$ . Поділивши кількість теплоти на величину площі  $\partial F$  і проміжок часу  $\partial \tau$  отримуємо густину теплового потоку  $q_m$  через одиницю площі поверхні тіла.

Отже, густина теплового потоку визначається за формулою  $q = \frac{\partial^2 Q}{\partial F \partial \tau}$ . Якщо розділити густину теплового потоку  $q_m$  на різницю температур  $(t_p - t_m)$ , то отримаємо густину теплового потоку за наявності одиничного перепаду температур між температурою рідини  $t_p$  і температурою на поверхні тіла  $t_m$ ,

тобто  $\alpha = \frac{q}{t_p - t_m}$ .  $\alpha$  – називають коефіцієнтом теплообміну (теповіддачі) та

його розмірність  $[\alpha] = \frac{Дж}{м^2 \cdot с \cdot К}$ . В конвекційному теплообміні суттєвим є те, що

чим ближче рідина (газ) до поверхні тіла, вздовж якого рідина ковзає, тим більше величина її температури наближається до температури поверхні тіла. Під час зовнішнього ковзання рідини (газу) по поверхні тіла за температуру потоку рідини (газу)  $t_p$  беруть температуру рідини на найбільшій віддалі від поверхні тіла, тобто за межами при поверхневого теплового шару. Якщо потік рідини (газу) рухається всередині циліндричного каналу, то за температуру рідини  $t_p$  беруть середнє значення температури рідини в каналі. В залежності від причин конвекцію поділяють на вільну та вимушену.

**Вільна конвекція** – це коли рух рідини (газу) обумовлений тільки зміною густини рідини (газу) викликаной нерівномірним розподілом температурного поля. **Вимушена конвекція** – це коли рух рідини (газу) викликаний зовнішніми силовими чинниками.

**Теплове випромінювання** – це процес в якому передача теплоти в просторі здійснюється електромагнітними хвилями, котрі випромінює тіло завдяки своїй внутрішній енергії внаслідок складних молекулярних та внутріатомних процесів. Електромагнітні хвилі, які випромінює тіло, частково поглинаються навколишніми тілами. Процес поглинання є процесом перетворення енергії електромагнітних хвиль у внутрішню енергію тіла.

**Закон теплопровідності** (закон Фур'є) поєднує між собою вектор густини теплового потоку  $\vec{q}$  і градієнт температур  $gradt$ . **Закон Фур'є** стверджує, що **густина теплового потоку прямо пропорційна коефіцієнта теплопровідності та градієнта температур**, тобто

$$\vec{q} = -\lambda gradt, \quad (3)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності тіла і його розмірність  $[\lambda] = \frac{Вт}{м \cdot К}$ . Знак «мінус» вказує на те, що напрями теплового потоку і градієнта температур протилежні.

### ***Коефіцієнт теплопровідності***

Враховуючи рівняння (1) – (3) отримаємо, що коефіцієнт теплопровідності речовини визначається за формулою:

$$\lambda = -\frac{\partial^2 Q}{\frac{\partial t}{\partial n} \partial F \partial n}$$

Коефіцієнт теплопровідності речовини  $\lambda$  є його фізичною характеристикою і характеризує здатність речовини проводити теплоту. **Величина коефіцієнта теплопровідності** дорівнює кількості теплоти, яка проходить впродовж 1 секунди через 1м<sup>2</sup> ізотермічної площі за умови, що градієнт температури дорівнює 1 градусу на 1 метр довжини вздовж нормалі до ізотермічної поверхні.

Величина коефіцієнта теплопровідності твердих тіл залежить від величини температури тіла та його вологості, а для рідин та газів – ще й від величини тиску. Для анізотропних матеріалів величина коефіцієнта теплопровідності залежить і від напрямку теплового потоку. Залежність коефіцієнта теплопровідності від температури інколи апроксимують лінійною функцією, тобто  $\lambda = \lambda_0(1 + \beta t)$ , де  $\lambda_0$  – коефіцієнт теплопровідності речовини з температурою  $0^\circ\text{C}$ ;  $\beta$  – коефіцієнт пропорційності, який визначається експериментальним шляхом;  $t$  – температура в  $^\circ\text{C}$ .

Для газів коефіцієнт теплопровідності із збільшенням температури зростає, а для рідин – спадає. Для твердих пористих тіл використання закону Фур'є є умовним, оскільки наявність пор не дозволяє говорити про тіло як суцільне. Коефіцієнт теплопровідності речовини для таких тіл називають ефективним. Величина ефективного коефіцієнта теплопровідності пористих тіл суттєво залежить від рівня вологості тіла.

### ***Рівняння теплопровідності Фур'є***

Рівняння теплопровідності Фур'є базується на законі теплопровідності Фур'є (3) та рівнянні балансу теплоти, в якому перетворення механічної енергії в теплову не враховується. Розглянемо тверде ізотропне тіло з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$  і на зовнішніх поверхнях тіла задані довільні теплові умови. Виділимо в тілі елементарний об'єм розмірами  $dx \times dy \times dz$  (рис.1). У виділений об'єм, в напрямку осі  $Ox$ , за час  $d\tau$  із зовні поступає кількість теплоти

$$dQ_1 = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydzd\tau.$$

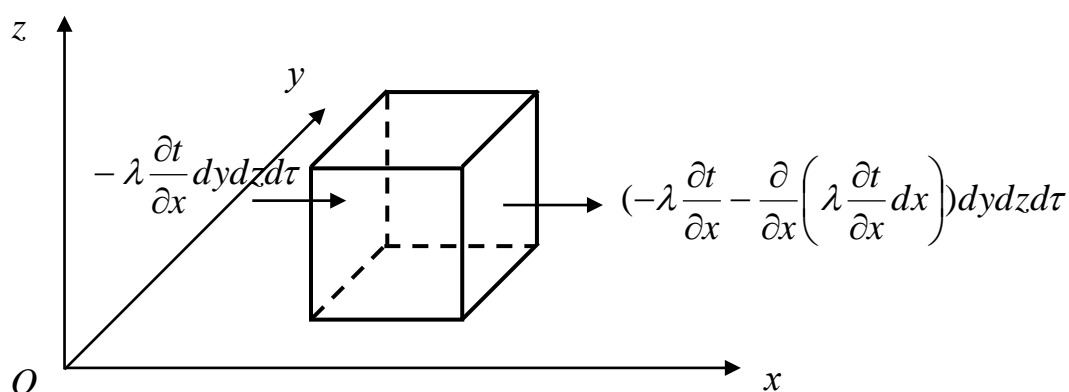


Рис. 1. Схема теплового потоку вздовж осі  $Ox$

З цього елементарного об'єму за проміжок часу  $d\tau$  в напрямку осі  $Ox$  витікає кількість теплоти

$$dQ_2 = \left( -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx \right) dydzd\tau.$$

Отже, в середині виділеного об'єму залишається кількість теплоти, яка дорівнює

$$\Delta Q_x = dQ_1 - dQ_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau.$$

Аналогічно, завдяки рухові теплоти в напрямку осей  $Oy$  та  $Oz$ , в середині елементарного об'єму залишиться відповідно кількість теплоти

$$\Delta Q_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) dx dy dz d\tau$$

та

$$\Delta Q_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau.$$

Отже, внаслідок руху теплоти через елементарний об'єм  $dx \times dy \times dz$  за проміжок часу  $d\tau$  в ньому залишиться кількість теплоти

$$\Delta Q = \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z$$

або

$$\Delta Q = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right) dx dy dz d\tau.$$

Крім цього, в середині елементарного об'єму за проміжок часу  $d\tau$  внутрішніми джерелами теплоти виділяється кількість теплоти

$$dQ_3 = q_v dV d\tau,$$

де  $q_v$  – кількість теплоти, яка виділяється в одиничному об'ємі за одиницю

часу; розмірність  $[q_v] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{с}}$ ;  $dV = dx dy dz$  – об'єм елементарного об'єму.

Теплота, яка поступила в елементарний об'єм, частково йде на зміну внутрішньої енергії тіла, тобто

$$dU = c \rho dV \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau,$$

де  $c$  – питома теплоємність речовини;  $\rho$  – питома густина речовини;  $\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$  –

зміна температури в елементарному об'ємі за проміжок часу  $d\tau$ . Записавши рівняння теплового балансу, отримаємо рівність

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right) dx dy dz d\tau + q_v dx dy dz d\tau = c \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz d\tau.$$

Враховуючи, що  $dx \neq 0$ ,  $dy \neq 0$ ,  $dz \neq 0$ ,  $d\tau \neq 0$  попереднє рівняння набере вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v = c \rho \frac{\partial t}{\partial \tau}. \quad (4)$$

Рівняння (4) називають **рівнянням теплопровідності**. Для випадку, якщо коефіцієнт теплопровідності речовини є сталою величиною, то рівняння теплопровідності (4) набере вигляду



$$\lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + q_v = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (5)$$

або

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (6)$$

де  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коефіцієнт теплопровідності, його розмірність  $[a] = \frac{m^2}{c}$ .

Якщо температурне поле стаціонарне, тобто  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ , то в рівняннях теплопровідності (4) – (6) права частина дорівнює нулеві, *наприклад* рівняння (6) набере вигляду:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

### **Початкова та граничні умови**

Диференціальне рівняння теплопровідності описує явище теплопровідності в загальному вигляді. Для повного формулювання задачі теплопровідності необхідно вказати рівняння теплопровідності, початкову та граничні умови для температурного поля.

**Початкова умова** вказує розподіл температурного поля в тілі у початковий момент часу. *Наприклад*, початкову умову в декартовій системі координат можна записати у вигляді:

$$t(x, y, z, 0) = f(x, y, z). \quad (7)$$

Для **стаціонарного температурного поля** початкова умова **не потрібна**.

В математичній теорії теплопровідності використовуються граничні умови, які є ідеалізованою формою опису реальних фізичних процесів теплообміну між тілами.

**Гранична умова першого типу.** Задається розподіл температурного поля на поверхні тіла для кожного моменту часу. *Наприклад*,

$$t_m = f(x, y, z, \tau), \quad (8)$$

де  $t_m$  – температура на поверхні тіла;  $x, y, z$  – координати точок поверхні тіла.

**Гранична умова другого типу.** Задається значення густини теплового потоку в кожній точці поверхні тіла в довільний момент часу. *Наприклад*,

$$q_m = f(x, y, z, \tau), \quad (9)$$

де  $q_m$  – густина теплового потоку на поверхні тіла;  $x, y, z$  – координати точок поверхні тіла.

**Гранична умова третього типу.** Вказується температура навколишнього середовища  $t_p$  і коефіцієнт теплообміну (тепловіддачі)  $\alpha$ , який характеризує інтенсивність теплообміну між тілом та речовиною, яка омиває поверхню тіла:

$$-\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_m = \alpha (t_p - t_m), \quad (10)$$

де  $\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_m$  – градієнт температури на поверхні тіла;  $t_p$  – температура рідини (газу), яка омиває поверхню тіла, за межами при поверхневого теплового шару;  $t_m$  – температура поверхні тіла;  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну (тепловіддачі);  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності речовини.

Граничні умови можуть задаватись і у вигляді комбінацій граничних умов першого, другого і третього типів.

Для математичної постановки задачі теплопровідності необхідно мати одне з рівнянь теплопровідності, початкову умову та одну з граничних умов.

## **Тема 2. Стационарне температурне поле в одношарових тілах**

### *Температурне поле в плоскій однорідній стінці*

Розглянемо необмежену плоску однорідну стінку товщиною  $l_1$ , зовнішні поверхні якої паралельні площині  $Oyz$  декартової системи координат, розташованої в межах  $0 \leq x \leq l_1$ . Вважаємо, що

– стінка ізотропне тіло;

– коефіцієнт теплопровідності речовини  $\lambda$  є сталою величиною у всіх точках стінки, тобто

$$\lambda(x) = \lambda = \text{const}, \quad (0 \leq x \leq l_1); \quad (11)$$

– внутрішні джерела теплоти відсутні

$$q_v = 0; \quad (12)$$

– процес передачі теплоти в стінці є стаціонарним, тобто не залежить від часу і тому

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0. \quad (13)$$

За умов, якщо зовнішні поверхні стінки є ізотермічними (тобто температура на цих поверхнях не залежить від координат), то температурне

поле в стінці одновимірне, тому  $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$  та  $\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$ . Отже, рівняння

теплопровідності (2.8) для стінки з врахуванням (2.15) – (2.17) набере вигляду

$$\frac{d^2 t(x)}{dx^2} = 0, \quad (0 < x < l_1). \quad (14)$$

Зінтегрувавши двічі це рівняння отримаємо

$$t(x) = C_1 x + C_2. \quad (15)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  визначаємо з граничних умов.

**Граничні умови першого типу.** Нехай на зовнішніх поверхнях стінки задано температуру, тобто

$$t(0) = t_{m0} \text{ та } t(l_1) = t_{m1}. \quad (16)$$

Підставляючи (15) в (16) отримаємо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування:

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = t_{m0}; \quad C_1 \cdot l_1 + C_2 = t_{m1}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь отримаємо, що  $C_2 = t_{m0}$  і  $C_1 = \frac{t_{m1} - t_{m0}}{l_1}$ .

Отже, **розподіл температурного поля в плоскій стінці** за наявності граничних умов **першого типу** матиме вигляд:

$$t(x) = \frac{t_{m1} - t_{m0}}{l_1} x + t_{m0}, \quad (0 \leq x \leq l_1). \quad (17)$$

На рис.2 вказано розподіл температурного поля по товщині стінки.

Гradient температури є сталою величиною по всій товщині стінки і дорівнює

$$\text{grad}t = \frac{dt}{dx} = -\frac{t_{m0} - t_{m1}}{l_1}.$$

Густину теплового потоку визначаємо, використовуючи закон Фур'є (3)

$$q = -\lambda \text{grad}t = \frac{\lambda}{l_1} (t_{m0} - t_{m1}).$$

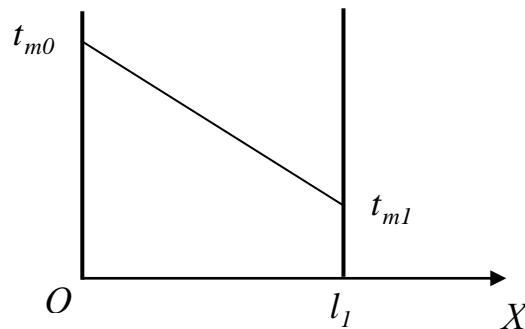


Рис. 2. Розподіл температурного поля в плоскій стінці

Кількість теплоти  $Q$ , яка проходить за проміжок часу  $\tau$  через ділянку поверхні стінки площею  $F$ , дорівнює

$$Q = qF\tau = \frac{\lambda}{l_1} F(t_{m0} - t_{m1})\tau.$$

**Граничні умови третього типу.** Нехай рідина (газ) омивають ліву та праву поверхні стінки. Температури рідин (газу) на найбільшій віддалі від стінок, тобто за межами теплового приповерхневого шару, відповідно дорівнюють  $t_{p0}$  та  $t_{p1}$ . Коефіцієнти теплообміну від рідини (газу) до поверхні лівої стінки  $-\alpha_0$ , а від поверхні правої стінки до рідини (газу)  $-\alpha_1$ . Гранична умова третього типу для цієї задачі набере вигляду:

$$-\lambda \frac{dt(0)}{dx} = \alpha_0(t_{p0} - t(0)) \text{ та } -\lambda \frac{dt(l_1)}{dx} = \alpha_1(t(l_1) - t_{p1}). \quad (18)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  рівняння (15) визначаємо з граничних умов (18). Підставляючи (15) в (18), отримуємо систему рівнянь для визначення сталих

$$-\lambda C_1 = \alpha_0(t_{p0} - C_2); \quad -\lambda C_1 = \alpha_1(C_1 l_1 + C_2 - t_{p1}).$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо, що

$$C_1 = \frac{(t_{p1} - t_{p0}) \frac{\alpha_0}{\lambda}}{\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + l_1 \frac{\alpha_0}{\lambda} + 1}; \quad C_2 = \frac{\left( \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{l_1 \alpha_0}{\lambda} \right) t_{p0} + t_{p1}}{\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + l_1 \frac{\alpha_0}{\lambda} + 1}.$$

Отже, **розподіл температурного поля** по товщині плоскої стінки у випадку граничних умов **третього типу** матиме вигляд:

$$t(x) = \frac{(t_{p1} - t_{p0}) \frac{\alpha_0}{\lambda} x + \left( \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{l_1 \alpha_0}{\lambda} \right) t_{p0} + t_{p1}}{\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + l_1 \frac{\alpha_0}{\lambda} + 1}$$

або

$$t(x) = \frac{(t_{p1} - t_{p0}) x + \left( \frac{\lambda}{\alpha_1} + l_1 \right) t_{p0} + \frac{\lambda}{\alpha_0} t_{p1}}{\frac{\lambda}{\alpha_0} + l_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}}, \quad (0 \leq x \leq l_1). \quad (19)$$

Гradient температури є сталою величиною по всій товщині стінки і дорівнює

$$\text{grad}t = \frac{dt}{dx} = \frac{(t_{p1} - t_{p0})}{\frac{\lambda}{\alpha_0} + l_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}}.$$

Густину теплового потоку визначаємо використовуючи закон Фур'є (3)

$$q = -\lambda \text{grad}t = -\frac{(t_{p1} - t_{p0}) \lambda}{\frac{\lambda}{\alpha_0} + l_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}}, \quad q = \frac{(t_{p0} - t_{p1})}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{l_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1}} \quad \text{або} \quad q = k(t_{p0} - t_{p1}),$$

де величину  $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{l_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1}}$  називають **коефіцієнтом теплопередачі** плоскої

стінки. Величину обернену до коефіцієнта теплопередачі називають **термічним опором** і позначають буквою  $R$ , тобто

$$R = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{l_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка проходить за проміжок часу  $\tau$  через ділянку поверхні стінки площею  $F$ , дорівнює

$$Q = qF\tau = \frac{(t_{p0} - t_{p1})}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{l_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1}} F\tau \quad \text{або} \quad Q = k(t_{p0} - t_{p1})F\tau.$$

## Температурне поле в циліндричній однорідній стінці

Розглянемо безмежну кругову циліндричну стінку з внутрішнім радіусом  $r_0$  і зовнішнім радіусом  $r_1$  за умов, що стінка ізотропне тіло та коефіцієнт теплопровідності речовини  $\lambda$  є сталою величиною і не залежить від координати. Вісь симетрії порожнистої труби збігається з віссю  $Oz$  циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ . Вважаємо, що внутрішня та зовнішня поверхні однорідної циліндричної стінки є ізотермічні поверхні та внутрішні джерела теплоти відсутні, тобто  $q_V = 0$ . Оскільки, внутрішня та зовнішня поверхні порожнистого тіла є ізотермічними поверхнями, то температурне поле в стінці змінюється лише в радіальному напрямі. Отже, температурне поле є функцією тільки від  $r - t(r)$ .

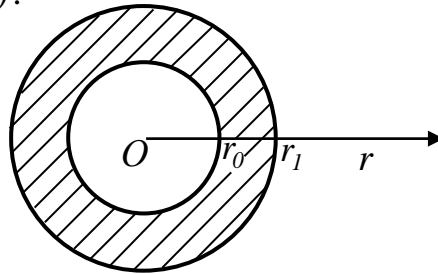


Рис. 3. Одношарова циліндрична стінка

Внаслідок цього справедливі рівності:  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$ , і тоді

рівняння теплопровідності набере вигляду:

$$\frac{d^2 t(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt(r)}{dr} = 0, \quad (r_0 < r < r_1). \quad (20)$$

Розв'язок даного диференціального рівняння такий:

$$t(r) = C_1 \ln r + C_2. \quad (21)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  необхідно визначати з граничних умов.

**Граничні умови першого типу.** Нехай на внутрішній та зовнішній поверхнях однорідної циліндричної стінки задано умови:

$$t(r_0) = t_{m0}; \quad t(r_1) = t_{m1}. \quad (22)$$

Підставляючи (21) в (22) отримаємо систему рівнянь для визначення  $C_1$  і  $C_2$ :

$$C_1 \ln r_0 + C_2 = t_{m0}, \quad C_1 \ln r_1 + C_2 = t_{m1}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь отримаємо, що

$$C_1 = \frac{t_{m1} - t_{m0}}{\ln r_1 / r_0} \quad \text{і} \quad C_2 = \frac{t_{m0} \ln r_1 - t_{m1} \ln r_0}{\ln r_1 / r_0}.$$

Отже, **розподіл температурного поля** по товщині циліндричної стінки за наявності **граничних умов першого типу** описується законом:

$$t(r) = \frac{t_{m1} - t_{m0}}{\ln r_1 / r_0} \ln r + \frac{t_{m0} \ln r_1 - t_{m1} \ln r_0}{\ln r_1 / r_0}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1). \quad (23)$$

$$\text{Градiєнт температури дорiвнює } \text{grad}t = \frac{dt(r)}{dr} = \frac{t_{m1} - t_{m0}}{r \ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda \text{grad}t = \lambda \frac{t_{m0} - t_{m1}}{r \ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

Кiлькiсть теплоти  $Q$ , яка проходить за час  $\tau$  через довiльну кругову поверхню труби довжиною  $l$ , дорiвнює

$$Q_l(r) = 2\pi r l q \tau = 2\pi l \tau \lambda \frac{t_{m0} - t_{m1}}{\ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

**Граничнi умови третього типу.** Розглядаємо ту ж порожнисту цилiндричну стiнку. Вважаємо, що внутрiшню поверхню порожнистого цилiндра омиває рiдина (газ) з температурою  $t_{p0}$ , а зовнiшню поверхню – рiдина (газ) з температурою  $t_{p1}$ . Нехай мiж рiдинами (газами) та цилiндричним тiлом iснує конвекцiйний теплообмiн по закону

$$\lambda \frac{dt(r_0)}{dr} = \alpha_0(t(r_0) - t_{p0}); \quad -\lambda \frac{dt(r_1)}{dr} = \alpha_1(t(r_1) - t_{p1}). \quad (24)$$

Пiдставляючи (21) в рiвняння (24), отримаємо систему рiвнянь для визначення сталих iнтегрування  $C_1$  i  $C_2$ :

$$\lambda \frac{C_1}{r_0} = \alpha_0(C_1 \ln r_0 + C_2 - t_{p0}); \quad -\lambda \frac{C_1}{r_1} = \alpha_1(C_1 \ln r_1 + C_2 - t_{p1}).$$

Розв'язуючи дану систему рiвнянь отримаємо, що

$$C_1 = \frac{t_{p1} - t_{p0}}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_1}{r_0}}; \quad C_2 = \frac{t_{p0} \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln r_1 \right) + t_{p1} \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

Отже, **розподiл температурного поля** по товщинi цилiндричної стiнки за наявностi **граничних умов третього типу** описується формулою:

$$t(r) = \frac{(t_{p1} - t_{p0}) \ln r + t_{p0} \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln r_1 \right) + t_{p1} \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_1}{r_0}} \quad (r_0 \leq r \leq r_1). \quad (25)$$

$$\text{Градiєнт температури дорiвнює } \text{grad}t = \frac{dt(r)}{dr} = \frac{t_{p1} - t_{p0}}{r \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_1}{r_0} \right)}.$$

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda \text{grad}t = \lambda \frac{t_{p0} - t_{p1}}{r \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_1}{r_0} \right)}.$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка проходить за час  $\tau$  через ділянку труби довжиною  $l$ , дорівнює

$$Q_l(r) = 2\pi l q \tau = 2\pi l \tau \lambda \frac{t_{p0} - t_{p1}}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

### Температурне поле в сферичній однорідній стінці

Розглянемо сферичну стінку, радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхонь якої відповідно дорівнюють  $r_0$  та  $r_1$ . Центр сферичних поверхонь стінки збігається з центром сферичної системи координат  $r, \varphi, \psi$ . Вважаємо, що внутрішні джерела теплоти відсутні, тобто  $q_V = 0$ , та внутрішня і зовнішня поверхні сферичної стінки є ізотермічними поверхнями.

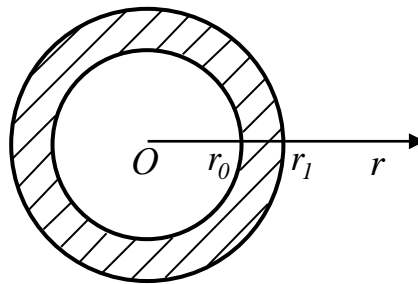


Рис. 4. Схема сферичної порожнистої стінки

Коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки  $\lambda$  величина стала та не залежить від координат точки. Оскільки внутрішня та зовнішня поверхні порожнистої сфери є ізотермічними поверхнями, то температурне поле в тілі змінюється тільки в радіальному напрямі. Отже, температурне поле є функцією тільки від координати  $r - t(r)$ .

Враховуючи попередні твердження, рівняння теплопровідності для сферичної стінки матиме вигляд

$$\frac{d^2(rt)}{dr^2} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{d^2t(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dt(r)}{dr} = 0 \quad (r_0 < r < r_1). \quad (26)$$

Розв'язок рівняння теплопровідності (26) такий:

$$t(r) = \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (27)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  необхідно визначати з граничних умов.

**Граничні умови першого типу.** Нехай на внутрішній та зовнішній поверхнях однорідної сферичної стінки задано значення температур:

$$t(r_0) = t_{m0}; \quad t(r_1) = t_{m1}. \quad (28)$$

Підставляючи (27) в (28), отримуємо систему рівнянь для визначення  $C_1$  і  $C_2$ :

$$\frac{C_1}{r_0} + C_2 = t_{m0}, \quad \frac{C_1}{r_1} + C_2 = t_{m1}.$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь отримаємо, що

$$C_1 = \frac{(t_{m0} - t_{m1})r_0r_1}{r_1 - r_0} \text{ а } C_2 = \frac{t_{m1}r_1 - t_{m0}r_0}{r_1 - r_0}.$$

Отже, **розподіл температурного поля по товщині сферичної стінки за наявності граничних умов першого типу** описується рівнянням

$$t(r) = \frac{(t_{m0} - t_{m1})r_0r_1}{r(r_1 - r_0)} + \frac{t_{m1}r_1 - t_{m0}r_0}{r_1 - r_0}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1). \quad (29)$$

Градiєнт температури дорiвнює

$$\text{grad}t = \frac{dt(r)}{dr} = \frac{(t_{m1} - t_{m0})r_0r_1}{r^2(r_1 - r_0)}.$$

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda \text{grad}t = \lambda \frac{(t_{m0} - t_{m1})r_0r_1}{r^2(r_1 - r_0)}.$$

Кiлькiсть теплоти  $Q$ , яка проходить за час  $\tau$  через довiльну сферичну поверхню тiла, дорiвнює

$$Q(r) = 4\pi r^2 q \tau = 4\pi \tau \lambda \frac{(t_{m0} - t_{m1})r_0r_1}{r_1 - r_0}.$$

**Граничні умови третього типу.** Розглядаємо ту ж сферичну стiнку. Вважаємо, що внутрiшню поверхню порожнистого цилiндра омиває рiдина (газ) з температурою  $t_{p0}$ , а зовнiшню поверхню – рiдина (газ) з температурою  $t_{p1}$ . Нехай мiж рiдинами (газами) та внутрiшньою i зовнiшньою поверхнями сферичного тiла iснують конвекцiйнi теплообмiни за законом

$$\lambda \frac{dt(r_0)}{dr} = \alpha_0(t(r_0) - t_{p0}); \quad -\lambda \frac{dt(r_1)}{dr} = \alpha_1(t(r_1) - t_{p1}). \quad (30)$$

Пiдставляючи (27) в рiвняння (30), отримаємо систему рiвнянь для визначення сталих iнтегрування  $C_1$  i  $C_2$ :

$$-\lambda \frac{C_1}{r_0^2} = \alpha_0 \left( \frac{C_1}{r_0} + C_2 - t_{p0} \right); \quad \lambda \frac{C_1}{r_1^2} = \alpha_1 \left( \frac{C_1}{r_1} + C_2 - t_{p1} \right).$$

Розв'язуючи цю систему рiвнянь, отримаємо, що

$$C_1 = \frac{t_{p0} - t_{p1}}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}; \quad C_2 = \frac{t_{p0} \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} - \frac{1}{r_1} \right) + t_{p1} \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}.$$

Отже, **розподіл температурного поля по товщині сферичної стінки за наявності граничних умов третього типу** описується формулою:



$$t(r) = \frac{\frac{t_{p0} - t_{p1}}{r} + t_{p0} \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} - \frac{1}{r_1} \right) + t_{p1} \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1). \quad (31)$$

Градiєнт температури дорiвнює  $gradt = \frac{dt(r)}{dr} = \frac{t_{p1} - t_{p0}}{r^2 \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)}$ .

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda gradt = \lambda \frac{t_{p0} - t_{p1}}{r^2 \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)}.$$

Кiлькiсть теплоти  $Q$ , яка проходить за час  $\tau$  через довiльну сферичну поверхню тiла, дорiвнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q \tau = 4\pi \tau \lambda \frac{t_{p0} - t_{p1}}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}$ .

### Методика розв'язування задач

**Задача 1.** Визначити розподiл температурного поля в бетоннiй стiнцi товщиною 60 см i кiлькiсть теплоти, яка проходить через стiнку площею  $F = 8 \text{ м}^2$  впродовж доби, якщо температура на внутрiшнiй поверхнi  $t_{m0} = 15^\circ \text{ C}$  i на зовнiшнiй поверхнi  $t_{m1} = -25^\circ \text{ C}$ . Коефiцiєнт теплопровiдностi бетону взяти  $\lambda(t) = 1,42 - 11 \cdot 10^{-4} t$ , де  $[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Для випадку, коли мiж значенням коефiцiєнта теплопровiдностi речовини i температурою iснує лiнiйна залежнiсть  $\lambda(t) = a + bt$ , усереднений коефiцiєнт теплопровiдностi визначається за формулою  $\lambda_{cp} = a + b \frac{t_{m0} + t_{m1}}{2}$ .

Отже, усереднений коефiцiєнт теплопровiдностi для бетоннiй стiнки в температурних межах  $[-25^\circ \text{ C}; 15^\circ \text{ C}]$  дорiвнює

$$\lambda_{cp} = 1,42 - 11 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{-25 + 15}{2} = 1,4255 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Розподiл температурного поля по товщинi плоскiй бетоннiй стiнки за граничних умов першого типу, враховуючи (17), дорiвнює

$$t_l(x) = \frac{-25 - 15}{0,6} x + 15 = -66,67x + 15, \quad (0 \leq x \leq 0,6).$$

Градiєнт температури дорiвнює  $gradt(x) = -66,67 \frac{^\circ \text{ C}}{\text{м}}$ . Густина теплового потоку становить величину

$$q = -\lambda gradt(x) = -1,4255 \cdot (-66,67) = 95 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Кількість теплоти, яка проходить через стінку площею  $F = 8 \text{ м}^2$  впродовж доби, дорівнює  $Q = qF\tau = 95 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 3600 = 65687 \text{ кДж}$ .

**Задача 2.** Визначити розподіл температурного поля в цегляній стінці і кількість теплоти, яка проходить через стінку площею  $F = 8,4 \text{ м}^2$  впродовж доби, якщо температура повітря всередині кімнати  $t_{p0} = 23^\circ \text{ C}$ , а зовні будинку –  $t_{p1} = -17^\circ \text{ C}$ . Коефіцієнти теплообміну між повітрям всередині кімнати та стіною  $\alpha_0 = 11,6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ , а між зовнішньою стіною та повітрям –  $\alpha_1 = 5,8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ . Товщина стінки  $l_1 = 380 \text{ мм}$ . Коефіцієнт теплопровідності для червоної цегли  $\lambda = 0,455 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . Визначити який об'єм природного газу необхідно спалити, щоб компенсувати втрати теплоти через стінку, якщо теплота згорання газу  $Q_{\text{газ}} = 34000 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}$ .

Розподіл температурного поля по товщині однорідної стінки описується формулою (19), тобто

$$t(x) = \frac{(t_{p1} - t_{p0})x + \frac{\lambda}{\alpha_0}t_{p1} + \left(\frac{\lambda}{\alpha_1} + l_1\right)t_{p0}}{\frac{\lambda}{\alpha_0} + l_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}}, \quad (0 \leq x \leq l_1).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t(x) = \frac{(-17 - 23)x + \frac{0,455}{11,6}(-17) + \left(\frac{0,455}{5,8} + 0,38\right)23}{\frac{0,455}{11,6} + 0,38 + \frac{0,455}{5,8}} \quad \text{або}$$

$$t(x) = -80,374x + 19,847 \quad (0 \leq x \leq 0,38).$$

Температура на лівій поверхні стінки дорівнює  $t(0) = 19,8 - 80,4 \cdot 0 = 19,8^\circ \text{ C}$ , а на правій поверхні стінки –  $t(0,38) = -80,4 \cdot 0,38 + 19,8 = -10,7^\circ \text{ C}$ .

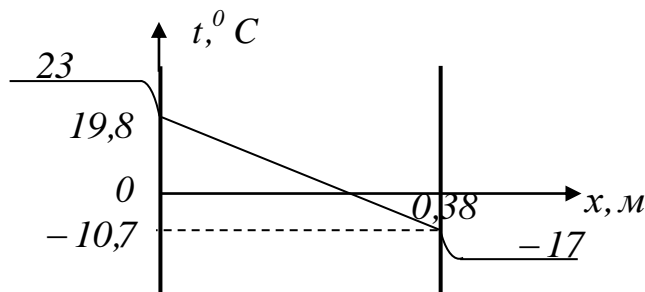


Рис. 5. Розподіл температурного поля по товщині цегляної стінки та в повітрі біля стінки

Густина теплового потоку через цегляну стінку визначається за формулою  $q = -\lambda \text{grad}t(x)$ , тобто  $q = -0,455 \cdot (-80,374) = 36,6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

Отже, кількість теплоти, яка проходить через цегляну стінку площею  $F = 8,4 \text{ м}^2$  впродовж доби, дорівнює  $Q = qF\tau = 36,6 \cdot 8,4 \cdot 24 \cdot 3600 = 26542 \text{ кДж}$ .

Об'єм природного газу необхідного для спалення, щоб компенсувати втрати теплоти внаслідок теплопровідності через стінку, дорівнює

$$V = \frac{Q}{Q_{\text{газ}}} = 0,781 \text{ м}^3.$$

Задача 3. Визначити розподіл температурного поля і кількість теплоти, яка проходить через кругову поверхню паропроводу довжиною  $l = 8 \text{ м}$  впродовж доби, якщо температури на зовнішній і внутрішній поверхнях паропроводу відповідно дорівнюють  $t_{m1} = 169^\circ \text{ C}$ ,  $t_{m0} = 170^\circ \text{ C}$ . Внутрішній радіус якого  $r_0 = 17,5 \text{ см}$  і зовнішній радіус –  $r_1 = 19 \text{ см}$ . Коефіцієнт теплопровідності для вуглецевої сталі дорівнює  $\lambda(t) = 58 - 0,042t$ ,  $[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Усереднений коефіцієнт теплопровідності сталі в температурних межах  $(169^\circ \text{ C}; 170^\circ \text{ C})$  дорівнює  $\lambda_{cp} = 58 - 0,042 \cdot \frac{169+170}{2} = 50,88 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Розподіл температурного поля по товщині сталюого паропроводу за граничних умов першого типу визначаємо за формулою (23), тобто

$$t(r) = \frac{t_{m1} - t_{m0}}{\ln r_1 - \ln r_0} \ln r + \frac{t_{m0} \ln r_1 - t_{m1} \ln r_0}{\ln r_1 - \ln r_0}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t(r) = \frac{169 - 170}{\ln 0,19 - \ln 0,175} \ln r + \frac{170 \ln 0,19 - 169 \ln 0,175}{\ln 0,19 - \ln 0,175}$$

або 
$$t(r) = -12,16 \ln r + 148,806, \quad (0,175 \leq r \leq 0,19).$$

Густина теплового потоку визначається за формулою  $q(r) = -\lambda \text{grad}t(r)$ ,

тобто 
$$q(r) = -50,88 \cdot \frac{-12,16}{r} = \frac{618,7}{r}.$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка проходить за час  $\tau$  через кругову поверхню труби довжиною  $l$  метрів, визначається за формулою  $Q_l(r) = 2\pi l q \tau$ . Підставляючи значення величин отримаємо, що впродовж доби через стінки сталюого паропроводу в навколишнє середовище передається теплоти

$$Q_8(r) = 2\pi \cdot 8 \cdot \frac{618,7}{r} \cdot 24 \cdot 3600 = 268693 \text{ кДж}.$$

Задача 4. Визначити кількість теплоти, яка покидає сталюу трубу довжиною  $l = 6 \text{ м}$  впродовж доби, якщо всередині труби тече газ середня температура якого  $t_{p0} = 800^\circ \text{ C}$  і зовні труба обдувається повітрям, температура якого  $t_{p1} = 15^\circ \text{ C}$ . Коефіцієнт теплообміну від газу до стінки труби  $\alpha_0 = 15 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$

і від стінки труби до повітря –  $\alpha_1 = 5,8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ . Внутрішній радіус труби  $r_0 = 0,025 \text{ м}$ , зовнішній радіус –  $r_1 = 0,055 \text{ м}$ . Коефіцієнт теплопровідності сталі  $\lambda = 46,6 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Розподіл температурного поля в циліндричній трубі за наявності граничних умов третього типу визначається за формулою (25), тобто

$$t(r) = \frac{(t_{p1} - t_{p0}) \ln r + t_{p0} \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln r_1 \right) + t_{p1} \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_1}{r_0}}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи значення величин, отримаємо

$$t_1(r) = \frac{(15 - 800) \ln r + 800 \left( \frac{46,6}{5,8 \cdot 0,055} + \ln 0,055 \right) + 15 \left( \frac{46,6}{15 \cdot 0,025} - \ln 0,025 \right)}{\frac{46,6}{15 \cdot 0,025} + \frac{46,6}{5,8 \cdot 0,055} + \ln \frac{0,055}{0,025}},$$

або 
$$t_1(r) = -2,895 \ln r + 429,54, \quad (0,025 \leq r \leq 0,055).$$

Температура на внутрішній та зовнішній стінках труби відповідно дорівнює  $t_1(0,025) = -2,895 \ln 0,025 + 429,54 = 440,22^\circ C$  і  $t_1(0,055) = 437,94^\circ C$ .

Густина теплового потоку визначається за формулою  $q(r) = -\lambda \text{grad}t(r)$ ,

тобто 
$$q(r) = -46,6 \cdot \frac{-2,895}{r} = \frac{134,92}{r}.$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка проходить за час  $\tau$  через кругову поверхню труби довжиною  $l$  метрів, визначається за формулою  $Q_l(r) = 2\pi r l q \tau$ . Підставляючи значення величин отримаємо, що впродовж доби через стінки сталюого паропроводу в навколишнє середовище передається теплоти

$$Q_6(r) = 2\pi r 6 \frac{134,92}{r} 24 \cdot 3600 = 439452 \text{кДж}.$$

**Задача 5.** Визначити розподіл температурного поля по товщині сферичної стінки виготовленої із залізобетону та теплові втрати впродовж доби, якщо температура на внутрішній стінці  $t_{m0} = 240^\circ C$  і на зовнішній –  $t_{m1} = 20^\circ C$ . Сферична стінка має розміри  $r_0 = 2\text{м}$  і  $r_1 = 2,25\text{м}$ . Коефіцієнт теплопровідності залізобетону  $\lambda = 1,55 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Розподіл температурного поля по товщині сферичної стінки за наявності граничних умов першого типу описується рівнянням (29), тобто

$$t(r) = \frac{(t_{m0} - t_{m1}) r_0 r_1}{r(r_1 - r_0)} + \frac{t_{m1} r_1 - t_{m0} r_0}{r_1 - r_0}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що розподіл температурного поля по товщині сферичної стінки дорівнює

$$t(r) = \frac{(240 - 20) \cdot 2 \cdot 2,25}{r(2,25 - 2)} + \frac{20 \cdot 2,25 - 240 \cdot 2}{2,25 - 2} \quad \text{або} \quad t(r) = \frac{3960}{r} - 1740, \quad (2 \leq r \leq 2,25).$$

Градієнт температури дорівнює  $gradt(r) = \frac{dt(r)}{dr} = \frac{(t_{m1} - t_{m0})r_0r_1}{r^2(r_1 - r_0)}$  або

враховуючи значення величин, отримаємо  $gradt(r) = -\frac{3960}{r^2}$ .

Густина теплового потоку  $q$  визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q(r) = -\lambda gradt(r) = \lambda \frac{(t_{m0} - t_{m1})r_0r_1}{r^2(r_1 - r_0)}$  або враховуючи умову задачі, отримаємо

$$q(r) = \frac{6138}{r^2}.$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка проходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q \tau = 4\pi \tau \lambda \frac{(t_{m0} - t_{m1})r_0r_1}{r_1 - r_0}$ . Підставляючи значення

величин, отримаємо втрату теплоти за добу

$$Q(r) = 4\pi \cdot 6138 \cdot 24 \cdot 3600 = 6664232 \text{ кДж}.$$

Задача 6. Визначити розподіл температурного поля по товщині залізобетонної сферичної стінки та теплові втрати впродовж доби, якщо середня температура газу всередині сферичної стінки  $t_{p0} = 90^\circ \text{C}$  і температура повітря зовні сферичної стінки  $t_{p1} = -20^\circ \text{C}$ . Коефіцієнт теплообміну від газу до

внутрішньої стінки  $\alpha_0 = 12 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$  і від зовнішньої поверхні стінки до повітря –

$\alpha_1 = 6,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ . Розміри залізобетонної сферичної стінки  $r_0 = 2 \text{ м}$  і  $r_1 = 2,25 \text{ м}$ .

Коефіцієнт теплопровідності залізобетону  $\lambda = 1,55 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Розподіл температурного поля по товщині сферичної стінки за граничних умов третього типу описується формулою (31), тобто

$$t(r) = \frac{\frac{t_{p0} - t_{p1}}{r} + t_{p0} \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} - \frac{1}{r_1} \right) + t_{p1} \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи дані отримаємо, що розподіл температурного поля в сферичній стінці дорівнює

$$t(r) = \frac{\frac{90 - (-20)}{r} + 90 \left( \frac{1,55}{6,2 \cdot 2,25^2} - \frac{1}{2,25} \right) + (-20) \left( \frac{1,55}{12 \cdot 2^2} + \frac{1}{2} \right)}{\frac{1,55}{12 \cdot 2^2} + \frac{1,55}{6,2 \cdot 2,25^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2,25}} \quad \text{або}$$

$$t(r) = \frac{570,58}{r} - 239,65, \quad (2 \leq r \leq 2,25).$$

Температура на внутрішній та зовнішній поверхнях сферичної стінки відповідно дорівнює:

$$t(2) = \frac{570,58}{2} - 239,65 = 45,64^{\circ}C \text{ і } t(2,25) = -13,94^{\circ}C.$$

Гradient температури дорівнює

$$\text{grad}t(r) = \frac{dt(r)}{dr} = \frac{t_{p1} - t_{p0}}{r^2 \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)},$$

а враховуючи значення величин, отримаємо  $\text{grad}t(r) = -\frac{570,58}{r^2}$ .

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q(r) = -\lambda \text{grad}t(r) = \lambda \frac{t_{p0} - t_{p1}}{r^2 \left( \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)}.$$

Підставляючи значення величин, отримаємо  $q(r) = \frac{884,4}{r^2}$ .

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q \tau = 4\pi \tau \lambda \frac{t_{p0} - t_{p1}}{\frac{\lambda}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}$ . Враховуючи

значення величин отримаємо, що впродовж доби через зовнішню поверхню сфери в навколишнє середовище переходить теплоти

$$Q(r) = 4\pi \cdot 884,4 \cdot 24 \cdot 3600 = 960223 \text{кДж}.$$

### Тема 3. Стаціонарне температурне поле в багатошарових тілах

#### *Температурне поле плоскої багатошарової стінки за наявності ідеального теплового контакту між шарами*

Розглядаємо задачу визначення стаціонарного одновимірного температурного поля в плоскій багатошаровій стінці (рис. 6) за наявності ідеального теплового контакту між шарами.

Нехай товщини ізотропних шарів стінки відповідно дорівнюють:  $l_1, l_2 - l_1, l_3 - l_2, \dots, l_n - l_{n-1}$ , рис. 6.

Рівняння теплопровідності для  $i$ -ого шару, у випадку стаціонарного температурного поля, таке:

$$\frac{d^2 t_i(x)}{dx^2} = 0, (i = \overline{1, n}; l_{i-1} < x < l_i), \quad (32)$$

де  $t_i(x)$  – температурне поле в  $i$ -ому шарі;  $x$  – координата;  $l_0 = 0$ ;  $n$  – кількість шарів.

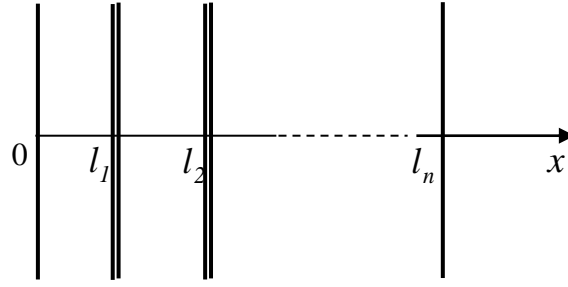


Рис. 6. Схема багатошарової стінки

Вважаємо, що між шарами існує **ідеальний тепловий контакт**, тобто існує рівність температур та теплових потоків в зоні контакту шарів:

$$t_i(l_i) = t_{i+1}(l_i), \quad \lambda_i \frac{dt_i(l_i)}{dx} = \lambda_{i+1} \frac{dt_{i+1}(l_i)}{dx} \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (33)$$

де  $\lambda_i$  – коефіцієнт теплопровідності  $i$  – ого шару.

Необхідно визначити розподіл стаціонарного температурного поля в плоскій багатошаровій стінці за наявності граничних умов першого типу

$$t_1(0) = t_{m0}; \quad t_n(l_n) = t_{mn} \quad (34)$$

або третього типу

$$\lambda_1 \frac{dt_1(0)}{dx} - \alpha_0(t_1(0) - t_{p0}) = 0; \quad \lambda_n \frac{dt_n(l_n)}{dx} + \alpha_n(t_n(l_n) - t_{pn}) = 0, \quad (35)$$

де  $t_{m0}$  і  $t_{mn}$  – температури зовнішніх поверхонь багатошарової стінки;  $\alpha_0$  і  $\alpha_n$  – коефіцієнти тепловіддачі (теплообміну);  $t_{p0}$ ,  $t_{pn}$  – температури зовнішнього середовища, яке омиває поверхні стінок, за межами теплового при поверхневого шару.

Величину **узагальненого коефіцієнта теплопровідності**  $\lambda_y$  для багатошарової стінки визначаємо за формулою:

$$\frac{l_n}{\lambda_y} = \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_n - l_{n-1}}{\lambda_n}. \quad (36)$$

Введемо нову змінну для кожного шару стінки

$$x_{iy} = \frac{\lambda_y}{\lambda_i} (x - l_{i-1}) + l_{i-1,y}, \quad (l_{i-1} \leq x \leq l_i; i = \overline{1, n}), \quad (37)$$

де  $l_0 = 0$  і  $l_{0,y} = 0$ . З даної залежності отримаємо, що:

$$l_{1y} = \frac{l_1 \lambda_y}{\lambda_1}, \dots, l_{iy} - l_{i-1,y} = \frac{(l_i - l_{i-1}) \lambda_y}{\lambda_i}, \quad (i = \overline{2, n}). \quad (38)$$

Сумуючи співвідношення (38) отримаємо, що

$$l_{ny} = l_n \text{ та } l_{i-1,y} = \frac{l_1 \lambda_y}{\lambda_1} + \frac{(l_2 - l_1) \lambda_y}{\lambda_2} + \dots + \frac{(l_{i-1} - l_{i-2}) \lambda_y}{\lambda_{i-1}}. \quad (39)$$

Враховуючи співвідношення (37) отримаємо диференціальну залежність між координатою  $x$  і приведеною координатою  $x_{iy}$ , а саме:

$$dx = \frac{\lambda_i}{\lambda_y} dx_{iy}. \quad (40)$$

Рівняння теплопровідності в приведених координатах матиме вигляд:

$$\frac{d^2 t_i(x_{iy})}{dx_{iy}^2} = 0, \quad (l_{i-1,y} < x_{iy} < l_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (41)$$

Умови ідеального теплового контакту між шарами (33) наберуть вигляду:

$$t_i(l_{iy}) = t_{i+1}(l_{iy}), \quad \frac{dt_i(l_{iy})}{dx_{iy}} = \frac{dt_{i+1}(l_{iy})}{dx_{i+1,y}}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (42)$$

Розв'язки рівнянь теплопровідності (41) за умов (42) такі:

$$t_i(x_{iy}) = C_1 x_{iy} + C_2, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (43)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначаємо з граничних умов (34) або (35), які в приведених координатах, враховуючи (37) і (39), наберуть вигляду:

$$t_1(0) = t_{m0}, \quad t_n(l_n) = t_{mn}, \quad (44)$$

$$\text{та} \quad \lambda_y \frac{dt_1(0)}{dx_{1y}} - \alpha_0 [t_1(0) - t_{p0}] = 0; \quad \lambda_y \frac{dt_n(l_n)}{dx_{ny}} + \alpha_n [t_n(l_n) - t_{pn}] = 0. \quad (45)$$

**Граничні умови першого типу.** Використовуючи рівняння (43) та граничну умову (44) отримаємо, що сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  дорівнюють:

$$C_1 = \frac{t_{mn} - t_{m0}}{l_n} \quad \text{і} \quad C_2 = t_{m0}.$$

Отже, розподіл температурного поля за наявності граничної умови першого типу (44) в приведених координатах такий:

$$t_i(x_{iy}) = \frac{t_{mn} - t_{m0}}{l_n} x_{iy} + t_{m0} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (46)$$

Замінюючи приведену координату  $x_{iy}$  на координату  $x$  з врахуванням (37), отримаємо:

$$t_i(x) = \frac{t_{mn} - t_{m0}}{l_n} \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_i} (x - l_{i-1}) + l_{i-1,y} \right) + t_{m0}.$$

Отже, враховуючи (39), **розподіл стаціонарного одновимірного температурного поля в багатошаровій стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами і граничних умов першого типу, тобто умов (34), має вигляд:**



$$t_i(x) = \frac{(t_{mn} - t_{m0})\lambda_y}{l_n} \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_{i-1} - l_{i-2}}{\lambda_{i-1}} + \frac{x - l_{i-1}}{\lambda_i} \right) + t_{m0}, \quad (47)$$

$$(l_{i-1} \leq x \leq l_i; i = \overline{1, n}).$$

Градiєнт температури в  $i$  – ому шарі стiнки дорiвнює

$$\text{grad}t_i(x) = \frac{dt_i(x)}{dx} = \frac{(t_{mn} - t_{m0})\lambda_y}{l_n \lambda_i}, \quad (l_{i-1} \leq x \leq l_i; i = \overline{1, n}).$$

Густину теплового потоку визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda_i \text{grad}t_i(x) = -\frac{(t_{mn} - t_{m0})\lambda_y}{l_n}, \text{ або } q = \frac{(t_{m0} - t_{mn})\lambda_y}{l_n}.$$

Густина теплового потоку не залежить від координати  $x$ .

Величину  $k = \frac{\lambda_y}{l_n}$  називають **коефіцієнтом теплопередачі**

**багатошарової плоскої стiнки**. Величину обернену до коефіцієнта теплопередачі, називають **термічним опором** і позначають буквою  $R$ , тобто

$$R = \frac{l_n}{\lambda_y}.$$

Кiлькiсть теплоти  $Q$ , яка переходить за промiжок часу  $\tau$  через поверхню стiнки площею  $F$ , дорiвнює

$$Q = qF\tau = \frac{(t_{m0} - t_{mn})\lambda_y}{l_n} F\tau \text{ або } Q = k(t_{m0} - t_{mn})F\tau.$$

**Граничні умови третього типу.** Якщо на границях багатошарової стiнки задано умови теплообміну (35), то використовуючи запис цієї граничної умови в приведених координатах (45), визначаємо сталі  $C_1$  і  $C_2$  з системи рiвнянь

$$\lambda_y C_1 - \alpha_0(C_2 - t_{p0}) = 0; \quad \lambda_y C_1 + \alpha_n(C_1 l_n + C_2 - t_{pn}) = 0.$$

Розв'язуючи систему рiвнянь, отримаємо, що

$$C_1 = \frac{t_{pn} - t_{p0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n}, \quad C_2 = \frac{t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n \right) + t_{pn} \frac{\lambda_y}{\alpha_0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n}.$$

Отже, розподіл температурного поля в багатошаровій стiнці в приведених координатах за наявності граничних умов третього типу (45) матиме вигляд:

$$t_i(x_{iy}) = \frac{(t_{pn} - t_{p0})x_{iy} + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n \right) + t_{pn} \frac{\lambda_y}{\alpha_0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n}, \quad (l_{i-1,y} \leq x_i \leq l_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (48)$$

Здійснюючи перехід від приведених координат до реальних, тобто враховуючи залежності (37) та (39), отримаємо, що **розподіл стаціонарного одновимірного температурного поля** в плоскій багат шаровій стінці за наявності **ідеального теплового контакту** між шарами (33) та **граничних умов третього типу**, тобто умов (35), має такий вигляд:

$$t_i(x) = \left( (t_{pn} - t_{p0}) \lambda_y \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_{i-1} - l_{i-2}}{\lambda_{i-1}} + \frac{x - l_{i-1}}{\lambda_i} \right) + \frac{\lambda_y t_{pn}}{\alpha_0} + \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n \right) t_{p0} \right) \times \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n \right)^{-1}, \quad (l_{i-1} \leq x \leq l_i; i = \overline{1, n}). \quad (49)$$

Градiєнт температури в  $i$ -ому шарі стінки дорівнює

$$\text{grad} t_i(x) = \frac{dt_i(x)}{dx} = \frac{(t_{pn} - t_{p0}) \lambda_y}{\lambda_i \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0} + l_n + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} \right)}, \quad (l_{i-1} \leq x \leq l_i; i = \overline{1, n}).$$

Густина теплового потоку визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda_i \text{grad} t_i(x) = -\frac{(t_{pn} - t_{p0}) \lambda_y}{\left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0} + l_n + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} \right)}, \quad \text{або} \quad q = \frac{(t_{p0} - t_{pn}) \lambda_y}{\left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0} + l_n + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} \right)},$$

де величину  $k = \frac{\lambda_y}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + l_n + \frac{\lambda_y}{\alpha_n}}$  називають коефіцієнтом теплопередачі

багат шарової плоскої стінки за наявності граничних умов третього типу. Густина теплового потоку не залежить від координати  $x$ .

Величину, обернену коефіцієнту теплопередачі, називають термічним

опором і позначають буквою  $R$ , тобто  $R = \frac{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + l_n + \frac{\lambda_y}{\alpha_n}}{\lambda_y}$ .

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за проміжок часу  $\tau$  через поверхню стінки площею  $F$ , дорівнює

$$Q = qF\tau = \frac{(t_{m0} - t_{mn}) \lambda_y}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + l_n + \frac{\lambda_y}{\alpha_n}} F\tau \quad \text{або} \quad Q = k(t_{m0} - t_{mn}) F\tau.$$

## **Температурне поле в багатошаровій циліндричній стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами**

Розглядаємо безмежну циліндричну стінку, яка складається з  $n$  ізотропних шарів (рис. 7). Вважаємо, що багатошаровий циліндр порожнистий, тобто  $r_0 \neq 0$ . Товщини шарів відповідно дорівнюють  $r_1 - r_0; r_2 - r_1; \dots; r_n - r_{n-1}$ . Нехай внутрішня та зовнішня поверхні багатошарової циліндричної стінки є ізотермічними поверхнями та внутрішні джерела теплоти відсутні, тобто  $q_V = 0$ . Температурне поле за цих умов є функцією тільки координати  $r - t(r)$ . Рівняння теплопровідності для  $i$ -ого шару має вигляд:

$$\frac{d^2 t_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt_i(r)}{dr} = 0, \quad (r_{i-1} < r < r_i; i = \overline{1, n}). \quad (50)$$

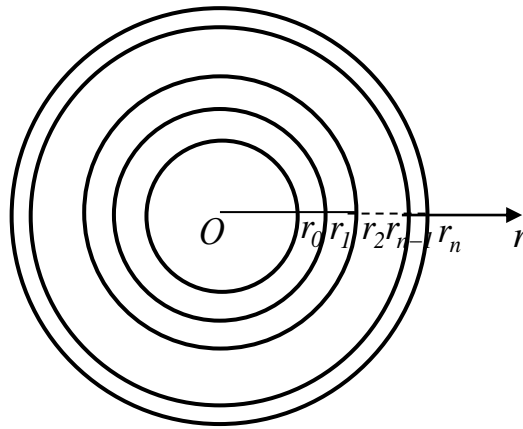


Рис. 7. Багатошарова циліндрична стінка

Вважаємо, що між шарами існує ідеальний тепловий контакт, тобто

$$t_i(r_i) = t_{i+1}(r_i); \quad \lambda_i \frac{dt_i(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1} \frac{dt_{i+1}(r_i)}{dr}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (51)$$

**Граничні умови першого типу.** Нехай на внутрішній та зовнішній поверхнях багатошарової стінки задано граничні умови:

$$t(r_0) = t_{m0}; \quad t(r_n) = t_{mn}. \quad (52)$$

Величину **узагальненого коефіцієнта теплопровідності** для  $n$ -шарового циліндра визначаємо за формулою:

$$\frac{\ln r_1 - \ln r_0}{\lambda_1} + \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\lambda_2} + \dots + \frac{\ln r_n - \ln r_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{\ln r_n - \ln r_0}{\lambda_y}. \quad (53)$$

Приведені товщини шарів циліндричної стінки дорівнюють:

$$\frac{\ln r_1 - \ln r_0}{\lambda_1} = \frac{\ln r_{1y} - \ln r_0}{\lambda_y}; \quad \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\lambda_2} = \frac{\ln r_{2y} - \ln r_{1y}}{\lambda_y}; \dots; \quad (54)$$

$$\frac{\ln r_n - \ln r_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{\ln r_{ny} - \ln r_{n-1,y}}{\lambda_y}.$$

Просумувавши ліві та праві частини рівнянь (54), отримаємо, що  $r_n = r_{ny}$ .

Вводимо нову змінну для кожного шару циліндра:

$$\frac{\ln r - \ln r_0}{\lambda_1} = \frac{\ln r_y - \ln r_0}{\lambda_y}; \quad \frac{\ln r - \ln r_1}{\lambda_2} = \frac{\ln r_y - \ln r_{1y}}{\lambda_y}; \quad \dots;$$

$$\frac{\ln r - \ln r_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{\ln r_y - \ln r_{n-1,y}}{\lambda_y}. \quad (55)$$

Із співвідношень (55) отримаємо, що координата  $r_y$  для кожного шару залежить від координати  $r$  таким чином:

$$\ln r_y = \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0}; \quad \ln r_y = \ln r_{1y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r}{r_1}; \quad \dots;$$

$$\ln r_y = \ln r_{n-1,y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_n} \ln \frac{r}{r_{n-1}}. \quad (56)$$

Диференціальні залежності між координатою  $r$  та координатою  $r_y$  на основі залежностей (55) матимуть вигляд:

$$dr = \frac{\lambda_1}{\lambda_y} r_0^{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_y}} r_y^{\frac{\lambda_1}{\lambda_y}-1} dr_y; \quad dr = \frac{\lambda_2}{\lambda_y} r_1 r_{1y}^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_y}} r_y^{\frac{\lambda_2}{\lambda_y}-1} dr_y; \quad \dots; \quad dr = \frac{\lambda_n}{\lambda_y} r_{n-1} r_{n-1,y}^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_y}} r_y^{\frac{\lambda_n}{\lambda_y}-1} dr_y. \quad (57)$$

Умови ідеального теплового контакту між шарами стінок (51), враховуючи (53) – (57), наберуть вигляду:

$$t_i(r_{iy}) = t_{i+1}(r_{iy}), \quad \frac{dt_i(r_{iy})}{dr_y} = \frac{dt_{i+1}(r_{iy})}{dr_y}; \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (58)$$

Рівняння теплопровідності (50) в приведених координатах будуть наступні:

$$\frac{d^2 t_i(r_y)}{dr_y^2} + \frac{1}{r_y} \frac{dt_i(r_y)}{dr_y} = 0, \quad (r_{i-1,y} < r_y < r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (59)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (59) матиме вигляд:

$$t_i(r_y) = C_{1i} \ln r_y + C_{2i}, \quad (r_{i-1,y} \leq r \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (60)$$

Враховуючи умови ідеального теплового контакту між приведеними шарами (58) та рівняння (60), отримаємо, що

$$C_{1i} = C_{1,i+1}, \quad C_{2i} = C_{2,i+1}; (i = \overline{1, n-1}).$$

Отже, температура в приведеному багат шаровому циліндрі розподіляється за законом:

$$t_i(r_y) = C_1 \ln r_y + C_2, \quad (r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (61)$$

Підставляючи рівняння (61) в граничні умови (52), отримаємо систему рівнянь для визначення сталих  $C_1$  та  $C_2$ :

$$C_1 \ln r_0 + C_2 = t_{m0}, \quad C_1 \ln r_n + C_2 = t_{mn}.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, визначаємо сталі інтегрування

$$C_1 = \frac{t_{mn} - t_{m0}}{\ln r_n - \ln r_0}, \quad C_2 = \frac{t_{m0} \ln r_n - t_{mn} \ln r_0}{\ln r_n - \ln r_0}.$$

Тепер рівняння (61) набере вигляду:

$$t_i(r_y) = \frac{(t_{mn} - t_{m0}) \ln r_y + t_{m0} \ln r_n - t_{mn} \ln r_0}{\ln r_n - \ln r_0}, \quad (r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (62)$$

Переходячи від приведеної координати  $r_y$  до координати  $r$ , із врахуванням (56), отримаємо:

$$t_i(r) = \frac{(t_{mn} - t_{m0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_{i-1}} \ln \frac{r_{i-1}}{r_{i-2}} + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \ln \frac{r}{r_{i-1}} \right) + t_{m0} \ln r_n - t_{mn} \ln r_0}{\ln r_n - \ln r_0}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}). \quad (63)$$

Отже, розподіл стаціонарного температурного поля в багат шаровій циліндричній стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами і граничних умов першого типу матиме вигляд (63).

Гradient температури дорівнює:

$$\text{grad} t_i(r) = \frac{dt_i(r)}{dr} = \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \frac{(t_{mn} - t_{m0})}{r(\ln r_n - \ln r_0)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda_i \text{grad} t_i(r) = \lambda_y \frac{t_{m0} - t_{mn}}{r(\ln r_n - \ln r_0)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через ділянку труби довжиною  $l$ , дорівнює

$$Q_l(r) = 2\pi r l q \tau = 2\pi l \tau \lambda_y \frac{t_{m0} - t_{mn}}{\ln r_n - \ln r_0}.$$

**Граничні умови третього типу.** Визначаємо розподіл температурного поля в багат шаровому циліндрі, якщо рівняння теплопровідності для  $i$ -ого шару має вигляд (50) і між шарами існує ідеальний тепловий контакт (51). Нехай внутрішню поверхню порожнистого багат шарового циліндра омиває рідина (газ) з температурою  $t_{p0}$  і зовнішню поверхню – рідина (газ) з температурою  $t_{pn}$ , тобто на границях порожнистого багат шарового циліндра існує конвекційний теплообмін між рідинами (газами) та тілом за законом:

$$\lambda_1 \frac{dt_1(r_0)}{dr} = \alpha_0(t_1(r_0) - t_{p0}); \quad -\lambda_n \frac{dt_n(r_n)}{dr} = \alpha_n(t_n(r_n) - t_{pn}). \quad (64)$$

Переходячи до приведенного  $n$ -шарового циліндра, з використанням результатів (53) – (61) отримаємо, що температурне поле в приведенному  $n$ -шаровому циліндрі описується рівняннями:

$$t_i(r_y) = C_1 \ln r_y + C_2, \quad (r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (65)$$

Граничні умови (64), враховуючи (53) і (57), в приведених координатах наберуть вигляд:

$$\lambda_y \frac{dt_1(r_0)}{dr_y} = \alpha_0(t_1(r_0) - t_{p0}); \quad -\lambda_y \frac{dt_n(r_n)}{dr_y} = \alpha_n(t_n(r_n) - t_{pn}). \quad (66)$$

Підставляючи рівняння (65) в граничні умови (66), отримаємо систему рівнянь для визначення сталих  $C_1$  та  $C_2$ :

$$\left(\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} - \ln r_0\right)C_1 - C_2 = -t_{m0}; \quad \left(\frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln r_n\right)C_1 + C_2 = t_{mn}.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь отримаємо, що

$$C_1 = \frac{t_{pn} - t_{p0}}{\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}, \quad C_2 = \frac{t_{p0}\left(\frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln r_n\right) + t_{pn}\left(\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} - \ln r_0\right)}{\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}.$$

Отже, температурне поле в приведеному багат шаровому циліндрі описується співвідношеннями:

$$t_i(r_y) = \frac{(t_{pn} - t_{p0})\ln r_y + t_{p0}\left(\frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln r_n\right) + t_{pn}\left(\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} - \ln r_0\right)}{\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}, \quad (67)$$

$$(r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{i,y}; i = \overline{1, n}).$$

Використовуючи співвідношення (56) здійснимо перехід від приведеної координати  $r_y$  до координати  $r$ , тобто врахуємо, що

$$\ln r_y = \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \ln \frac{r}{r_{i-1}},$$

тоді **розподіл стаціонарного температурного поля** в багат шаровій циліндричній стінці за наявності **ідеального теплового контакту** між шарами і **граничних умов третього типу** матиме вигляд:

$$t_i(r) = \frac{(t_{pn} - t_{p0})\left(\ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \ln \frac{r}{r_{i-1}}\right) + t_{p0}\left(\frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln r_n\right) + t_{pn}\left(\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} - \ln r_0\right)}{\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}, \quad (68)$$

$$(r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Гradient температури дорівнює

$$\text{grad}t_i(r) = \frac{dt_i(r)}{dr} = \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \frac{(t_{pn} - t_{p0})}{r\left(\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}\right)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda_i \text{grad}t_i(r) = \lambda_y \frac{t_{p0} - t_{pn}}{r\left(\frac{\lambda_y}{r_0\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n\alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}\right)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через ділянку труби довжиною  $l$ , дорівнює

$$Q_l(r) = 2\pi r l q \tau = 2\pi l \tau \lambda_y \frac{t_{p0} - t_{pn}}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}.$$

### **Теплова ізоляція труб. Критичний радіус ізоляції**

В практичній діяльності людини виникає проблема енергозбереження, тобто потреба зменшення теплопередачі між речовиною, яка рухається всередині циліндричної труби, і навколишнім середовищем. Для цього використовують теплову ізоляцію. Покриття труби, яке збільшує термічний опір, називають **тепловою ізоляцією**. Для теплової ізоляції використовують матеріали з низьким коефіцієнтом теплопровідності.

Дослідимо вплив товщини шару ізоляційного матеріалу та його характеристик на повний термічний опір ізольованої труби. Вважаємо, що між циліндричною трубою та ізоляційним матеріалом існує ідеальний тепловий контакт. Враховуючи результати (2.89) отримуємо, що розподіл температурного поля в другому шарі циліндричної стінки описується рівнянням

$$t_2(r) = \left( (t_{p2} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r}{r_1} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_2 \alpha_2} + \ln r_2 \right) + t_{p2} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right) \right) \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \ln \frac{r_2}{r_0} + \frac{\lambda_y}{r_2 \alpha_2} \right)^{-1}.$$

Густина теплового потоку, що переходить через зовнішню поверхню двошарової циліндричної стінки дорівнює

$$q_2 = -\lambda_2 \text{grad} t_2(r_2) \text{ або } q_2 = \frac{t_{p0} - t_{p2}}{r_2 \left( \frac{1}{\alpha_0 r_0} + \frac{1}{\lambda_y} \ln \frac{r_2}{r_0} + \frac{1}{\alpha_2 r_2} \right)}.$$

Оскільки  $\frac{\ln \frac{r_2}{r_0}}{\lambda_y} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_2}$ , то отримуємо, що густина теплового потоку дорівнює

$$q_2 = \frac{t_{p0} - t_{p2}}{r_2 \left( \frac{1}{r_0 \alpha_0} + \frac{1}{r_2 \alpha_2} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)}.$$

Кількість теплоти, що покидає двошарову циліндричну стінку довжиною  $l$  метр визначаємо за формулою

$$Q_l = 2\pi r_2 l q \tau.$$

Підставляючи значення густини теплового потоку, отримуємо

$$Q_l = \frac{2\pi (t_{p0} - t_{p2}) \tau}{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \frac{1}{r_2 \alpha_2} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Величину термічного опору запишемо як функцію зовнішнього радіуса ізоляції, тобто  $R(r_2) = \frac{1}{r_0 \alpha_0} + \frac{1}{r_2 \alpha_2} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1}$ . Дослідимо цю функцію

на екстремум. Візьмемо похідну по  $r_2$  і отримаємо  $\frac{dR(r_2)}{dr_2} = -\frac{1}{r_2^2 \alpha_2} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}$ . Ця

похідна матиме нульове значення якщо  $r_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$ . Друга похідна від цієї функції

в точці  $r_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$  матиме значення  $\frac{d^2 R(r_2)}{dr_2^2} = \frac{2}{r_2^3 \alpha_2} - \frac{1}{r_2^2 \lambda_2} = \frac{\alpha_2^3}{\lambda_2^4} > 0$ . Оскільки

$R''\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right) > 0$ , то термічний опір в точці  $r_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$  матиме мінімальне значення і

тепловий потік досягає максимальної величини. Зовнішній радіус теплоізоляційної труби, який дорівнює величині

$$r_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}, \quad (69)$$

називають **критичним радіусом**.

Отже, можна зробити такі висновки:

- якщо зовнішній радіус теплоізолюваної труби менший від критичного радіуса для вибраного ізоляційного матеріалу, то під час збільшення товщини теплоізоляційного шару теплові втрати зростають;
- якщо зовнішній радіус теплоізолюваної труби дорівнює або більший від критичного радіуса для вибраного теплоізоляційного матеріалу, то під час збільшенні товщини теплоізоляційного шару теплові втрати зменшуються.

### ***Температурне поле в багат шаровій сферичній стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами***

Розглядаємо сферичну стінку яка складається з  $n$  шарів (рис. 8). Товщини шарів відповідно дорівнюють  $r_1 - r_0; r_2 - r_1; \dots; r_n - r_{n-1}$ . Вважаємо, що багат шарова сферична стінка порожниста, тобто  $r_0 \neq 0$ . Нехай внутрішня та зовнішня поверхні багат шарової сферичної стінки є ізотермічними поверхнями і внутрішні джерела теплоти відсутні, тобто  $q_V = 0$ , тоді температурне поле є функцією тільки від координати  $r - t(r)$ . Рівняння теплопровідності для  $i$ -ого шару сферичної стінки має вигляд:

$$\frac{d^2(rt_i(r))}{dr^2} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2 t_i(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dt_i(r)}{dr} = 0 \quad (r_{i-1} < r < r_i; i = \overline{1, n}). \quad (70)$$

Вважаємо, що між шарами існує ідеальний тепловий контакт, тобто

$$t_i(r_i) = t_{i+1}(r_i); \quad \lambda_i \frac{dt_i(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1} \frac{dt_{i+1}(r_i)}{dr}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (71)$$

**Гранична умова першого типу.** Нехай на внутрішній та зовнішній поверхнях багат шарової сферичної стінки задано умови:



$$t(r_0) = t_{m0}; \quad t(r_n) = t_{mn}. \quad (72)$$

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_y$  для  $n$  – шарової сфери визначаємо за формулою

$$\frac{r_1 - r_0}{\lambda_1 r_1 r_0} + \frac{r_2 - r_1}{\lambda_2 r_2 r_1} + \dots + \frac{r_n - r_{n-1}}{\lambda_n r_n r_{n-1}} = \frac{r_n - r_0}{\lambda_y r_n r_0}. \quad (73)$$

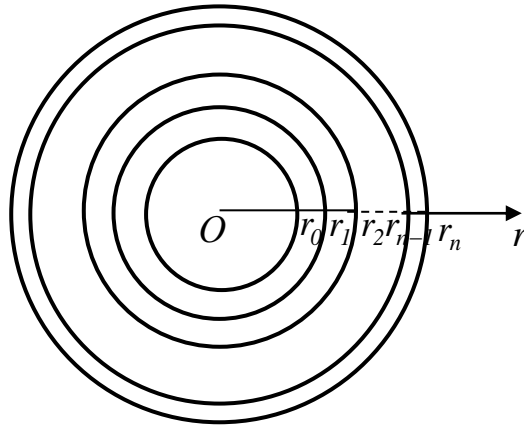


Рис. 8. Схема багатошарової сферичної стінки

Використовуючи узагальнений коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_y$  визначаємо приведені товщини багатошарової порожнистої сфери через співвідношення:

$$\frac{r_1 - r_0}{\lambda_1 r_1 r_0} = \frac{r_{1y} - r_0}{\lambda_y r_{1y} r_0}; \quad \frac{r_2 - r_1}{\lambda_2 r_2 r_1} = \frac{r_{2y} - r_{1y}}{\lambda_y r_{2y} r_{1y}}; \dots; \frac{r_n - r_{n-1}}{\lambda_n r_n r_{n-1}} = \frac{r_{ny} - r_{n-1,y}}{\lambda_y r_n r_{n-1,y}}. \quad (74)$$

Склавши окремо ліві і праві частини рівностей (74), та враховуючи (73), отримаємо, що  $\frac{r_n - r_0}{\lambda_y r_n r_0} = \frac{r_{ny} - r_0}{\lambda_y r_{ny} r_0}$ , тобто

$$r_n = r_{ny}. \quad (75)$$

Вводимо нову координату для кожного приведенного шару сфери:

$$\frac{r - r_0}{\lambda_1 r r_0} = \frac{\rho_{1y} - r_0}{\lambda_y \rho_{1y} r_0}; \quad \frac{r - r_1}{\lambda_2 r r_1} = \frac{\rho_{2y} - r_{1y}}{\lambda_y \rho_{2y} r_{1y}}; \dots; \frac{r - r_{n-1}}{\lambda_n r r_{n-1}} = \frac{\rho_{ny} - r_{n-1,y}}{\lambda_y \rho_{ny} r_{n-1,y}}, \quad (76)$$

де  $\rho_{iy}$  приведена координата для  $i$  – ого приведенного шару.

Із цих співвідношень отримаємо залежність між приведеною координатою  $\rho_{iy}$  і біжучою координатою  $r$ , тобто

$$\rho_{iy} = \frac{\lambda_i r_{i-1} r_{i-1,y} r}{(\lambda_i r_{i-1} - \lambda_y r_{i-1,y}) r + \lambda_y r_{i-1} r_{i-1,y}}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (77)$$

Диференціальна залежність між біжучою координатою  $r$  і приведеною координатою  $\rho_{iy}$  така:

$$dr = \frac{\lambda_i}{\lambda_y} \frac{r^2}{\rho_{iy}^2} d\rho_{iy} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (78)$$

Умови ідеального теплового контакту (71) для приведеної сфери запишуться у вигляді:

$$t_i(r_{iy}) = t_{i+1}(r_{iy}), \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (79)$$

а іншу умову ідеального теплового контакту (71), враховуючи (78), запишемо у вигляді

$$\frac{\lambda_i dt_i(r_{iy})}{\lambda_i \frac{r_i^2}{r_{iy}^2} d\rho_{iy}} = \frac{\lambda_{i+1} dt_{i+1}(r_{iy})}{\lambda_{i+1} \frac{r_i^2}{r_{iy}^2} d\rho_{i+1,y}} \quad \text{або} \quad \frac{dt_i(r_{iy})}{d\rho_{iy}} = \frac{dt_{i+1}(r_{iy})}{d\rho_{i+1,y}} \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (80)$$

Рівняння теплопровідності для кожного приведеного шару сфери набирає вигляду:

$$\frac{d^2 t_i(\rho_{iy})}{d\rho_{iy}^2} + \frac{2}{\rho_{iy}} \frac{dt_i(\rho_{iy})}{d\rho_{iy}} = 0 \quad (r_{i-1,y} < \rho_{iy} < r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (81)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (81) такий:

$$t_i(\rho_{iy}) = \frac{C_{1i}}{\rho_{iy}} + C_{2i}, \quad (r_{i-1,y} \leq \rho_{iy} \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (82)$$

Враховуючи умови ідеального теплового контакту між шарами (79), (80) отримаємо  $2(n-1)$  рівнянь для встановлення залежностей між сталими  $C_{1i}$  та  $C_{2i}$

$$\frac{C_{1i}}{r_{iy}} + C_{2i} = \frac{C_{1,i+1}}{r_{iy}} + C_{2,i+1}; \quad -\frac{C_{1i}}{r_{iy}^2} = \frac{C_{1,i+1}}{r_{iy}^2}; \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Із цієї системи рівнянь отримаємо, що  $C_{1i} = C_{1,i+1}$  та  $C_{2i} = C_{2,i+1}$ ,  $(i = \overline{1, n-1})$ .

Отже, можна вважати, що  $C_{1i} = C_1; C_{2i} = C_2$   $(i = \overline{1, n})$ .

Тепер розподіл температурного поля в приведеній  $n$ -шаровій сфері матиме вигляд:

$$t_i(\rho_{iy}) = \frac{C_1}{\rho_{iy}} + C_2, \quad (r_{i-1,y} \leq \rho \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (83)$$

Сталі  $C_1$  та  $C_2$  визначаємо із граничних умов (72), котрі враховуючи (83) запишуться у вигляді системи рівнянь:

$$\frac{C_1}{r_0} + C_2 = t_{m0}; \quad \frac{C_1}{r_n} + C_2 = t_{mn}.$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь отримаємо, що сталі дорівнюють:

$$C_1 = \frac{(t_{mn} - t_{m0})r_0r_n}{r_0 - r_n}; \quad C_2 = \frac{t_{m0}r_0 - t_{mn}r_n}{r_0 - r_n}.$$

Враховуючи значення сталих  $C_1$  та  $C_2$ , розподіл температурного поля в приведеній сфері такий:

$$t_i(\rho_{iy}) = \frac{(t_{mn} - t_{m0})r_0r_n}{(r_0 - r_n)\rho_{iy}} + \frac{t_{m0}r_0 - t_{mn}r_n}{r_0 - r_n}; \quad (r_{i-1,y} \leq \rho_{iy} \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}).$$

Залежність між приведеною координатою  $\rho_{iy}$  та біжучою координатою  $r$ , враховуючи співвідношення (76) та (77), наступна:

$$\frac{1}{\rho_{iy}} = \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_{i-1}} \left( \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_{i-2}} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{i-1}} \right). \quad (84)$$

Отже, розподіл **стаціонарного температурного поля** в  $n$ -шаровій сфері, якщо між шарами існує **ідеальний тепловий контакт** та задано **граничні умови першого типу**, матиме вигляд:

$$t_i(r) = \frac{r_0r_n(t_{mn} - t_{m0})}{r_0 - r_n} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_{i-1}} \left( \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_{i-2}} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{i-1}} \right) \right) + \frac{t_{m0}r_0 - t_{mn}r_n}{r_0 - r_n}. \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}). \quad (85)$$

**Гранична умова третього типу.** Нехай на внутрішній та зовнішній поверхнях багат шарової стінки задано конвекційний теплообмін із навколишнім середовищем, тобто:

$$\lambda_1 \frac{dt_1(r_0)}{dr} - \alpha_0 [t_1(r_0) - t_{p0}] = 0; \lambda_n \frac{dt_n(r_n)}{dr} + \alpha_n [t_n(r_n) - t_{pn}] = 0. \quad (86)$$

Як показано вище, розподіл температурного поля в приведеній сфері має вигляд (83), тобто:

$$t_i(\rho_{iy}) = \frac{C_1}{\rho_{iy}} + C_2, (r_{i-1,y} \leq \rho_i \leq r_{iy}, i = \overline{1, n}).$$

Сталі  $C_1$ ,  $C_2$  необхідно визначити з граничних умов (86). Ці умови в приведених координатах, враховуючи (78), наберуть вигляду:

$$\lambda_y \frac{dt_1(r_0)}{d\rho_{1y}} - \alpha_0 [t_1(r_0) - t_{p0}] = 0; \lambda_y \frac{dt_n(r_n)}{d\rho_{ny}} + \alpha_n [t_n(r_n) - t_{pn}] = 0. \quad (87)$$

Підставляючи (83) в (87) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення  $C_1$  і  $C_2$ :

$$\left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right) C_1 + C_2 = t_{p0}; \left( -\frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} + \frac{1}{r_n} \right) C_1 + C_2 = t_{pn}.$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $C_1$  і  $C_2$  отримаємо:

$$C_1 = \frac{t_{p0} - t_{pn}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}}; C_2 = \frac{t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} - \frac{1}{r_n} \right) + t_{pn} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}}.$$

Підставляючи значення сталих  $C_1$  та  $C_2$  в (83), отримаємо розподіл температурного поля в приведеній сфері:

$$t_i(\rho_{iy}) = \frac{(t_{p0} - t_{pn}) \frac{1}{\rho_{iy}} + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} - \frac{1}{r_n} \right) + t_{pn} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}}, (r_{i-1,y} \leq \rho_i \leq r_{iy}, i = \overline{1, n}) \quad (88)$$

Враховуючи співвідношення (84), розподіл **стаціонарного температурного поля** в  $n$ -шаровій сфері за наявності **ідеального теплового контакту** між шарами та **граничних умов третього типу** матиме вигляд:

$$t_i(r) = \frac{I}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} + \frac{I}{r_0} - \frac{I}{r_n}} \left\{ (t_{p0} - t_{pn}) \left[ \frac{I}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{I}{r_1} - \frac{I}{r_0} \right) + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_{i-1}} \left( \frac{I}{r_{i-1}} - \frac{I}{r_{i-2}} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \left( \frac{I}{r} - \frac{I}{r_{i-1}} \right) \right] + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_n r_n^2} - \frac{I}{r_n} \right) + t_{pn} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{I}{r_0} \right) \right\}; (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}). \quad (89)$$

### Методика розв'язування задач

**Задача 1.** Чотиришарова плоска стінка складається з важкого бетону на гранітному заповнювачі, глини, червоної цегли і пінопласту, товщини яких відповідно дорівнюють:  $l_1 = 20\text{см}$ ,  $l_2 - l_1 = 10\text{см}$ ,  $l_3 - l_2 = 25\text{см}$  і  $l_4 - l_3 = 5\text{см}$ . Температура на одній зовнішній поверхні стінки  $t_{m0} = 800^\circ\text{C}$ , а на другій –  $t_{m4} = 25^\circ\text{C}$ . Коефіцієнти теплопровідності важкого бетону  $\lambda_1 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , глини –  $\lambda_2 = 1,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , червоної цегли –  $\lambda_3 = 0,455 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  і пінопласту –  $\lambda_4 = 0,04 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . Визначити розподіл температурного поля в чотиришаровій плоскій стінці та густину теплового потоку. Розв'язати цю задачу враховуючи, що між шарами існує ідеальний тепловий контакт.

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності для чотиришарової плоскої стінки визначаємо за формулою (36), тобто  $\frac{l_4}{\lambda_y} = \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \frac{l_3 - l_2}{\lambda_3} + \frac{l_4 - l_3}{\lambda_4}$ .

Підставляючи значення величин отримаємо  $\frac{0,6}{\lambda_y} = \frac{0,2}{1,2} + \frac{0,1}{1,4} + \frac{0,25}{0,455} + \frac{0,05}{0,04}$ , тобто

$$\lambda_y = 0,2945 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Розподіл температурного поля в шарах плоскої стінки за наявності ідеального теплового контакту між шарами та граничних умов першого типу визначаємо за формулою (47).

Отже, розподіл температурного поля по товщині першого шару стінки дорівнює:  $t_1(x) = \frac{(t_{m4} - t_{m0})\lambda_y x}{l_4 \lambda_1} + t_{m0}$ , ( $0 \leq x \leq l_1$ ). Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_1(x) = \frac{(25 - 800) \cdot 0,2945 x}{0,6 \cdot 1,2} + 800 \quad \text{або} \quad t_1(x) = -316,97x + 800, \quad (0 \leq x \leq 0,2).$$

Температура на граничних поверхнях першого шару дорівнює  $t_1(0) = 800^\circ\text{C}$ ,  $t_1(0,2) = 736,6^\circ\text{C}$ . Густина теплового потоку дорівнює  $q_1 = -\lambda_1 \text{grad} t_1(x)$ , тобто

$$q_1 = -1,2 \cdot (-316,97) = 380,36 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Розподіл температурного поля по товщині другого шару стінки такий:

$$t_2(x) = \frac{(t_{m4} - t_{m0})\lambda_y}{l_4} \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{x - l_1}{\lambda_2} \right) + t_{m0}, \quad (l_1 \leq x \leq l_2). \quad \text{Підставляючи значення}$$

величин отримаємо

$$t_2(x) = \frac{(25 - 800) \cdot 0,2945}{0,6} \left( \frac{0,2}{1,2} + \frac{x - 0,2}{1,4} \right) + 800$$

або  $t_2(x) = -271,38x + 790,94, \quad (0,2 \leq x \leq 0,3).$

Температура на граничних поверхнях другого шару дорівнює  $t_2(0,2) = 736,6^\circ \text{C}$ ,  $t_2(0,3) = 709,44^\circ \text{C}$ . Густина теплового потоку дорівнює  $q_2 = -\lambda_2 \text{grad}t_2(x)$ , тобто

$$q_2 = -1,4 \cdot (-271,68) = 380,36 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Розподіл температурного поля по товщині третього шару стінки такий:

$$t_3(x) = \frac{(t_{m4} - t_{m0})\lambda_y}{l_4} \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \frac{x - l_2}{\lambda_3} \right) + t_{m0}, \quad (l_2 \leq x \leq l_3). \quad \text{Підставляючи}$$

значення величин отримаємо

$$t_3(x) = \frac{(25 - 800) \cdot 0,2945}{0,6} \left( \frac{0,2}{1,2} + \frac{0,1}{1,4} + \frac{x - 0,3}{0,455} \right) + 800,$$

або  $t_3(x) = -835,955x + 960,22, \quad (0,3 \leq x \leq 0,55).$

Температура на граничних поверхнях третього шару стінки дорівнює  $t_3(0,3) = 709,44^\circ \text{C}$ ,  $t_3(0,55) = 500,45^\circ \text{C}$ . Густина теплового потоку

$$q_3 = -\lambda_3 \text{grad}t_3(x), \quad \text{тобто} \quad q_3 = -0,455 \cdot (-835,95) = 380,36 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Розподіл температурного поля по товщині четвертого шару стінки

такий:  $t_4(x) = \frac{(t_{m4} - t_{m0})\lambda_y}{l_4} \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \frac{l_3 - l_2}{\lambda_3} + \frac{x - l_3}{\lambda_4} \right) + t_{m0}. \quad (l_3 \leq x \leq l_4).$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_4(x) = \frac{(25 - 800) \cdot 0,2945}{0,6} \left( \frac{0,2}{1,2} + \frac{0,1}{1,4} + \frac{0,25}{0,455} + \frac{x - 0,55}{0,04} \right) + 800, \quad \text{або}$$

$$t_4(x) = -9508,99x + 5730,39, \quad (0,55 \leq x \leq 0,6).$$

Температура на граничних поверхнях четвертого шару стінки дорівнює

$$t_4(0,55) = 500,45^\circ \text{C}, \quad t_4(0,6) = 25^\circ \text{C}.$$

Густина теплового потоку  $q_4 = -\lambda_4 \text{grad}t_4(x)$ , тобто

$$q_4 = -0,04 \cdot (-9508,99) = 380,36 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Задача 2. Чотиришарова плоска стінка складається з важкого бетону на гранітному заповнювачі, керамзитобетону, пустотілої цегли і вапняної штукатурки. Товщини яких відповідно дорівнюють:  $l_1 = 25 \text{см}$ ,  $l_2 - l_1 = 20 \text{см}$ ,  $l_3 - l_2 = 25 \text{см}$  і  $l_4 - l_3 = 5 \text{см}$ . Коефіцієнти теплопровідності важкого бетону

$\lambda_1 = 1,42 \frac{Bm}{m \cdot K}$ , керамзитобетону –  $\lambda_2 = 0,39 \frac{Bm}{m \cdot K}$ , пустотілої цегли –  $\lambda_3 = 0,44 \frac{Bm}{m \cdot K}$  і вапняної штукатурки –  $\lambda_4 = 0,7 \frac{Bm}{m \cdot K}$ . На зовнішніх поверхнях чотиришарової стінки існує конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем, температури яких дорівнюють  $t_{p0} = 375^0 C$  і  $t_{p4} = 20^0 C$ , а коефіцієнти теплообміну –  $\alpha_0 = 16 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$  і  $\alpha_4 = 8 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$ . Визначити розподіл температурного поля в чотиришаровій плоскій стінці та густину теплового потоку. Розв'язати цю задачу враховуючи, що між шарами існує ідеальний тепловий контакт.

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності для чотиришарової стінки визначаємо за формулою (36), тобто  $\frac{l_4}{\lambda_y} = \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \frac{l_3 - l_2}{\lambda_3} + \frac{l_4 - l_3}{\lambda_4}$ . Підставляючи значення величин отримаємо  $\frac{0,75}{\lambda_y} = \frac{0,25}{1,42} + \frac{0,2}{0,39} + \frac{0,25}{0,44} + \frac{0,05}{0,7}$ , тобто  $\lambda_y = 0,5646 \frac{Bm}{m \cdot K}$ .

Розподіл температурного поля по шарах плоскої стінки за наявності ідеальному тепловому контакті між шарами та граничних умов третього типу визначаємо за формулою (49).

Отже, розподіл температурного поля по товщині першого шару стінки

дорівнює: 
$$t_1(x) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \frac{\lambda_y x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_y t_{p4}}{\alpha_0} + \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4 \right) t_{p0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4}, \quad (0 \leq x \leq l_1).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_1(x) = \frac{(20 - 375) \frac{0,5646x}{1,42} + \frac{0,5646 \cdot 20}{16} + \left( \frac{0,5646}{8} + 0,75 \right) 375}{\frac{0,5646}{16} + \frac{0,5646}{8} + 0,75},$$

або 
$$t_1(x) = -164,913x + 360,37, \quad (0 \leq x \leq 0,25).$$

Температура на граничних поверхнях першого шару дорівнює  $t_1(0) = 360,37^0 C$ ,  $t_1(0,25) = 319,14^0 C$ . Густина теплового потоку дорівнює  $q_1 = -\lambda_1 \text{grad} t_1(x)$ , тобто

$$q_1 = -1,42 \cdot (-164,913) = 234,17 \frac{Bm}{m^2}.$$

Розподіл температурного поля по товщині другого шару стінки

дорівнює: 
$$t_2(x) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \lambda_y \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{x - l_1}{\lambda_2} \right) + \frac{\lambda_y t_{p4}}{\alpha_0} + \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4 \right) t_{p0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4}, \quad (l_1 \leq x \leq l_2).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_2(x) = \frac{(20 - 375) \cdot 0,5646 \left( \frac{0,25}{1,42} + \frac{x - 0,25}{0,39} \right) + \frac{0,5646 \cdot 20}{16} + \left( \frac{0,5646}{8} + 0,75 \right) 375}{\frac{0,5646}{16} + \frac{0,5646}{8} + 0,75},$$

або  $t_2(x) = -600,438x + 469,25, (0,25 \leq x \leq 0,45).$

Температура на граничних поверхнях другого шару дорівнює  $t_2(0,25) = 319,14^\circ C$ ,  $t_2(0,45) = 199,05^\circ C$ . Густина теплового потоку дорівнює  $q_2 = -\lambda_2 \text{grad} t_2(x)$ , тобто

$$q_2 = -0,39 \cdot (-600,438) = 234,17 \frac{Вт}{м^2}.$$

Розподіл температурного поля по товщині третього шару стінки такий:

$$t_3(x) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \lambda_y \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \frac{x - l_2}{\lambda_3} \right) + \frac{\lambda_y t_{p4}}{\alpha_0} + \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4 \right) t_{p0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4}, \quad (l_2 \leq x \leq l_3).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_3(x) = -532,206x + 438,54, (0,45 \leq x \leq 0,7).$$

Температура на граничних поверхнях третього шару дорівнює  $t_3(0,45) = 199,05^\circ C$ ,  $t_3(0,7) = 66^\circ C$ . Густина теплового потоку дорівнює  $q_3 = -\lambda_3 \text{grad} t_3(x)$ , тобто

$$q_3 = -0,44 \cdot (-532,2) = 234,17 \frac{Вт}{м^2}.$$

Розподіл температурного поля по товщині четвертого шару стінки такий:

$$t_4(x) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \lambda_y \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2} + \frac{l_3 - l_2}{\lambda_3} + \frac{x - l_3}{\lambda_4} \right) + \frac{\lambda_y t_{p4}}{\alpha_0} + \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4 \right) t_{p0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4} + l_4},$$

$$(l_3 \leq x \leq l_4).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_4(x) = -334,53x + 300,17, (0,7 \leq x \leq 0,75).$$

Температура на граничних поверхнях четвертого шару така  $t_4(0,7) = 66^\circ C$ ,  $t_4(0,75) = 49,27^\circ C$ . Густина теплового потоку дорівнює  $q_4 = -\lambda_4 \text{grad} t_4(x)$ , тобто

$$q_4 = -0,7 \cdot (-334,53) = 234,17 \frac{Вт}{м^2}.$$

**Задача 3.** Тришарова циліндрична стінка складається з шару бетону піщаного, сталюого шару та шару мінеральної вати. Розміри яких відповідно дорівнюють  $r_0 = 0,25 м$ ,  $r_1 = 0,35 м$ ,  $r_2 = 0,4 м$ ,  $r_3 = 0,6 м$ . Коефіцієнти



теплопровідності бетону піщаного –  $\lambda_1 = 1,25 \frac{Bm}{m \cdot K}$ , сталі –  $\lambda_2 = 52 \frac{Bm}{m \cdot K}$  і мінеральної вати  $\lambda_3 = 0,056 \frac{Bm}{m \cdot K}$ . Між шарами існує ідеальний тепловий контакт.

Визначити розподіл температурного поля по товщині тришарової циліндричної стінки та кількість теплоти, яка передається за добу в навколишнє середовище з циліндричної стінки довжиною  $l = 8m$ , якщо температура на внутрішній стінці стінки  $t_{m0} = 170^\circ C$  і на зовнішній –  $t_{m3} = 16^\circ C$ .

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності для циліндричної стінки за наявності ідеального теплового контакту між шарами визначається за формулою (53). Для випадку тришарової циліндричної стінки він дорівнює:

$$\frac{\ln r_3 - \ln r_0}{\lambda_y} = \frac{\ln r_1 - \ln r_0}{\lambda_1} + \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\lambda_2} + \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\lambda_3}.$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$\frac{\ln 0,6 - \ln 0,25}{\lambda_y} = \frac{\ln 0,35 - \ln 0,25}{1,25} + \frac{\ln 0,4 - \ln 0,35}{52} + \frac{\ln 0,6 - \ln 0,4}{0,056} \text{ і } \lambda_y = 0,1165 \frac{Bm}{m \cdot K}.$$

Розподіл температурного поля в багатошаровій циліндричній стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами та граничних умов першого типу визначаємо за формулою (63).

Отже, розподіл температурного поля в першому шарі циліндричної стінки такий:

$$t_1(r) = \frac{(t_{m3} - t_{m0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0} \right) + t_{m0} \ln r_3 - t_{m3} \ln r_0}{\ln r_3 - \ln r_0}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_1(r) = \frac{(16 - 170) \left( \ln 0,25 + \frac{0,1165}{1,25} \ln \frac{r}{0,25} \right) + 170 \ln 0,6 - 16 \ln 0,25}{\ln 0,6 - \ln 0,25}$$

або 
$$t_1(r) = -16,4 \ln r + 147,265, \quad (0,25 \leq r \leq 0,35).$$

Температура на граничних поверхнях шару з бетону піщаного дорівнює

$$t_1(0,25) = -16,4 \ln 0,25 + 147,265 = 170^\circ C \text{ і } t_1(0,35) = 164,5^\circ C.$$

Густина теплового потоку в першому шарі циліндричної стінки дорівнює  $q_1(r) = -\lambda_1 \text{grad} t_1(r) = -1,25 \frac{(-16,4)}{r}$ , тобто  $q_1(r) = \frac{20,5}{r}$ .

Кількість теплоти, яка переходить за час  $\tau$  через перший шар циліндричної стінки довжиною  $l$ , визначається за формулою  $Q_1 = 2\pi r l q \tau$ . Отже, за добу через перший шар циліндричної труби довжиною  $l = 8m$  переходить така кількість теплоти:  $Q_8 = 2\pi r 8 \frac{20,5}{r} 24 \cdot 3600 = 89030 \text{кДж}$ .

Розподіл температурного поля в другому шарі циліндричної стінки визначається за формулою

$$t_2(r) = \frac{(t_{m3} - t_{m0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r}{r_1} \right) + t_{m0} \ln r_3 - t_{m3} \ln r_0}{\ln r_3 - \ln r_0}, \quad (r_1 \leq r \leq r_2).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_2(r) = \frac{(16 - 170) \left( \ln 0,25 + \frac{0,1165}{1,25} \ln \frac{0,35}{0,25} + \frac{0,1165}{52} \ln \frac{r}{0,35} \right) + 170 \ln 0,6 - 16 \ln 0,25}{\ln 0,6 - \ln 0,25}$$

або 
$$t_2(r) = -0,394 \ln r + 164,06835, \quad (0,35 \leq r \leq 0,4).$$

Температури на граничних поверхнях сталю шару дорівнюють

$$t_2(0,35) = 164,5^\circ C \text{ і } t_2(0,4) = 164,43^\circ C.$$

Густина теплового потоку в другому шарі циліндричної стінки дорівнює  $q_2(r) = -\lambda_2 \text{grad} t_2(r) = -52 \frac{(-0,394)}{r}$ , тобто  $q_2(r) = \frac{20,5}{r}$ .

Кількість теплоти, яка переходить за добу через другий шар циліндричної стінки довжиною  $l = 8 \text{ м}$ , така

$$Q_8 = 2\pi r 8 \frac{20,5}{r} 24 \cdot 3600 = 89030 \text{ кДж}.$$

Розподіл температурного поля в третьому шарі циліндричної стінки визначається за формулою

$$t_3(r) = \frac{(t_{m3} - t_{m0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda_y}{\lambda_3} \ln \frac{r}{r_2} \right) + t_{m0} \ln r_3 - t_{m3} \ln r_0}{\ln r_3 - \ln r_0},$$

$(r_1 \leq r \leq r_2)$ . Підставляючи значення величин отримаємо  $t_3(r) = -366 \ln r - 171$   $(0,4 \leq r \leq 0,6)$ . Температура на граничних поверхнях шару з мінеральної вати дорівнює  $t_2(0,4) = 164,43^\circ C$  і  $t_2(0,6) = 16^\circ C$ .

Густина теплового потоку в третьому шарі циліндричної стінки дорівнює  $q_3(r) = -\lambda_3 \text{grad} t_3(r) = -0,056 \frac{(-366)}{r}$ , тобто  $q_3(r) = \frac{20,5}{r}$ .

Кількість теплоти, яка переходить за добу через третій шар циліндричної стінки довжиною  $l = 8 \text{ м}$ , дорівнює

$$Q_8 = 2\pi r 8 \frac{20,5}{r} 24 \cdot 3600 = 89030 \text{ кДж}.$$

**Задача 4.** Визначити розподіл температурного поля в чотиришаровій циліндричній стінці, якщо середня температура газу в середині циліндра  $t_{p0} = 800^\circ C$ , а зовні – стінка обдувається повітрям температура якого  $t_{p4} = 20^\circ C$ . Перший шар – сталю труба розміри якої  $r_0 = 0,2 \text{ м}$  і  $r_1 = 0,25 \text{ м}$ ; другий шар – сухий пісок, розміри якого  $r_1 = 0,25 \text{ м}$  і  $r_2 = 0,3 \text{ м}$ ; третій шар виготовлено з міді, розміри якого  $r_2 = 0,3 \text{ м}$  і  $r_3 = 0,35 \text{ м}$ ; четвертий шар виготовлено із мінеральної вати, розміри якого  $r_3 = 0,35 \text{ м}$  і  $r_4 = 0,4 \text{ м}$ . Коефіцієнт тепловіддачі від газу до внутрішньої чотиришарової циліндричної

стілки  $\alpha_0 = 35 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$ , а від зовнішньої поверхні мінеральної вати до повітря –  $\alpha_4 = 5,8 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$ . Між шарами існує ідеальний тепловий контакт. Коефіцієнт теплопровідності для сталі описується законом  $\lambda_1(t) = 58 - 0,042t$  і тому теплопровідність сталі з температурою  $800^\circ C$  дорівнює  $\lambda_1(800) = 58 - 0,042 \cdot 800 = 24,4 \frac{Bm}{m \cdot K}$ . Коефіцієнти теплопровідності сухого піску –  $\lambda_2 = 0,35 \frac{Bm}{m \cdot K}$ , міді –  $\lambda_3 = 393 \frac{Bm}{m \cdot K}$  і мінеральної вати –  $\lambda_4 = 0,056 \frac{Bm}{m \cdot K}$ .

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності для багат шарової циліндричної стінки, враховуючи (53), визначається за формулою

$$\frac{\ln \frac{r_4}{r_0}}{\lambda_y} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_2} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_3} + \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{\lambda_4}.$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$\frac{\ln \frac{0,4}{0,2}}{\lambda_y} = \frac{\ln \frac{0,25}{0,2}}{24,4} + \frac{\ln \frac{0,3}{0,25}}{0,35} + \frac{\ln \frac{0,35}{0,3}}{393} + \frac{\ln \frac{0,4}{0,35}}{0,056} \text{ або } \lambda_y = 0,23779 \frac{Bm}{m \cdot K}.$$

Розподіл температурного поля в багат шаровій циліндричній стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами та граничних умов третього типу визначаємо за формулою (68).

Отже, розподіл температурного поля в першому шарі такий

$$t_1(r) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln r_4 \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln \frac{r_4}{r_0}}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи дані отримаємо  $t_1(r) = -9,163 \ln r + 753,315$ ,  $(0,2 \leq r \leq 0,25)$ .

Температури на граничних поверхнях сталю шару дорівнюють  $t_1(0,2) = 768,06^\circ C$  і  $t_1(0,25) = 766,02^\circ C$ .

Густина теплового потоку в першому шарі циліндричної стінки дорівнює  $q_1(r) = -\lambda_1 \text{grad} t_1(r) = -24,4 \frac{(-9,163)}{r}$ , тобто  $q_1(r) = \frac{223,57}{r}$ .

Кількість теплоти, яка переходить за одну годину через перший шар циліндричної стінки довжиною  $l = 1m$ , така  $Q_1 = 2\pi r l \frac{223,57}{r} \cdot 3600 = 5057 \text{кДж}$ .

Розподіл температурного поля в другому шарі  $(r_1 \leq r \leq r_2)$  циліндричної стінки визначається за формулою

$$t_2(r) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r}{r_1} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln r_4 \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln \frac{r_4}{r_0}}.$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_2(r) = -638,772 \ln r - 119,509, \quad (0,25 \leq r \leq 0,3).$$

Температури на граничних поверхнях шару виконаного з піску дорівнюють  $t_2(0,25) = 766,02^\circ C$  і  $t_2(0,3) = 649,555^\circ C$ .

Густина теплового потоку в другому шарі циліндричної стінки дорівнює  $q_2(r) = -\lambda_2 \text{grad} t_2(r) = -0,35 \frac{(-638,772)}{r}$ , тобто  $q_2(r) = \frac{223,57}{r}$ .

Кількість теплоти, яка переходить за одну годину через другий шар циліндричної стінки довжиною  $l = 1 \text{ м}$ , наступна  $Q_1 = 2\pi r l \frac{223,57}{r} \cdot 3600 = 5057 \text{ кДж}$ .

Розподіл температурного поля в третьому шарі визначається за формулою

$$t_3(r) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda_y}{\lambda_3} \ln \frac{r}{r_2} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln r_4 \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln \frac{r_4}{r_0}}$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_3(r) = -0,569 \ln r + 648,87, \quad (0,3 \leq r \leq 0,35).$$

Температури на граничних поверхнях шару виконаного з міді дорівнюють

$$t_3(0,3) = 649,555^\circ C \text{ і } t_3(0,35) = 649,467^\circ C.$$

Густина теплового потоку в третьому шарі циліндричної стінки дорівнює  $q_3(r) = -\lambda_3 \text{grad} t_3(r) = -393 \frac{(-0,56888)}{r}$ , тобто  $q_3(r) = \frac{223,57}{r}$ .

Кількість теплоти, яка переходить за одну годину через третій шар циліндричної стінки довжиною  $l = 1 \text{ м}$ , така  $Q_1 = 2\pi r l \frac{223,57}{r} \cdot 3600 = 5057 \text{ кДж}$ .

Розподіл температурного поля в четвертому шарі дорівнює

$$t_4(r) = -3992,32 \ln r - 3541,76, \quad (0,35 \leq r \leq 0,4).$$

Температура на граничних поверхнях шару виконаного з мінеральної вати дорівнює

$$t_4(0,35) = 649,47^\circ C \text{ і } t_4(0,4) = 116,37^\circ C.$$

Густина теплового потоку в четвертому шарі циліндричної стінки дорівнює  $q_4(r) = -\lambda_4 \text{grad} t_4(r) = -0,056 \frac{(-3992,32)}{r}$ , тобто  $q_4(r) = \frac{223,57}{r}$ .

Кількість теплоти, яка переходить за одну годину через четвертий шар циліндричної стінки довжиною  $l = 1 \text{ м}$ , така  $Q_1 = 2\pi r l \frac{223,57}{r} \cdot 3600 = 5057 \text{ кДж}$ .

Характерною особливістю цієї циліндричної чотиришарової стінки є те, що зміна величини температури в шарі виконаному з міді незначна.

Задача 5. Визначити критичний радіус теплоізоляції, виготовленої з різних матеріалів, яка накладається на циліндричну трубу. Коефіцієнт

теплообміну між зовнішньою поверхнею теплоізоляції та навколишнім середовищем дорівнює  $\alpha_2 = 5,81 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$ . Коефіцієнт теплопровідності азбесту  $\lambda_2 = 0,157 \frac{Вт}{м \cdot К}$ ; глини –  $\lambda_2 = 0,93 \frac{Вт}{м \cdot К}$ ; вати мінеральної –  $\lambda_2 = 0,056 \frac{Вт}{м \cdot К}$ ; гуми технічної –  $\lambda_2 = 0,146 \frac{Вт}{м \cdot К}$ .

Тепловий потік досягає максимального значення, якщо зовнішній радіус теплоізоляційного шару дорівнює критичному радіусу (69), тобто величині  $r_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$ .

Величина критичного радіуса для азбесту  $r_2 = \frac{0,157}{5,81} = 0,027 м$ ; для глини  $r_2 = \frac{0,93}{5,81} = 0,16 м$ ; для мінеральної вати  $r_2 = \frac{0,056}{5,81} = 0,0096 м$ ; для гуми технічної  $r_2 = \frac{0,146}{5,81} = 0,025 м$ .

Отже, якщо зовнішній радіус ізольованої труби менший від критичного радіуса, для вибраного теплоізоляційного матеріалу, то при збільшенні товщини ізоляційного шару теплові втрати зростають; якщо зовнішній радіус ізольованої труби дорівнює або більший від критичного радіуса, для вибраного теплоізоляційного матеріалу, то при збільшенні товщини ізоляційного шару теплові втрати спадають.

Задача 6. Визначити розподіл температурного поля та густину теплового потоку в чотиришаровій сферичній стінці, якщо температура на внутрішній поверхні  $t_{m0} = 500^0 С$  і на зовнішній –  $t_{m4} = 20^0 С$ . Перший шар стінки виготовлений із бетону піщаного і його розміри  $r_0 = 1,2 м$ ,  $r_1 = 1,5 м$ ; другий шар – сталь і його розміри  $r_1 = 1,5 м$ ,  $r_2 = 1,65 м$ ; третій шар – мінеральна вата і його розміри  $r_2 = 1,65 м$ ,  $r_3 = 1,9 м$ ; четвертий шар виготовлено з глини, розміри якого  $r_3 = 1,9 м$ ,  $r_4 = 2 м$ . Між шарами існує ідеальний тепловий контакт. Коефіцієнти теплопровідності матеріалів дорівнюють: бетон піщаний –  $\lambda_1 = 1,25 \frac{Вт}{м \cdot К}$ , сталь –  $\lambda_2 = 42 \frac{Вт}{м \cdot К}$ , мінеральна вата –  $\lambda_3 = 0,056 \frac{Вт}{м \cdot К}$ , глина –  $\lambda_4 = 1,4 \frac{Вт}{м \cdot К}$ .

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності багат шарової сфери за наявності ідеального теплового контакту між шарами визначаємо за формулою (73). Для чотиришарової сфери формула набере вигляду:

$$\frac{r_1 - r_0}{\lambda_1 r_1 r_0} + \frac{r_2 - r_1}{\lambda_2 r_2 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\lambda_3 r_3 r_2} + \frac{r_4 - r_3}{\lambda_4 r_4 r_3} = \frac{r_4 - r_0}{\lambda_y r_4 r_0}$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$\frac{1,5 - 1,2}{1,25 \cdot 1,5 \cdot 1,2} + \frac{1,65 - 1,5}{42 \cdot 1,65 \cdot 1,5} + \frac{1,9 - 1,65}{0,056 \cdot 1,9 \cdot 1,65} + \frac{2 - 1,9}{1,4 \cdot 2 \cdot 1,9} = \frac{2 - 1,2}{\lambda_y \cdot 2 \cdot 1,2} \quad \text{або}$$

$$\lambda_y = 0,2113 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Розподіл температурного поля по товщині багат шарової сфери за наявності ідеального теплового контакту між шарами та граничних умов першого типу визначаємо за формулою (85).

Отже, розподіл температурного поля в першому шарі матиме вигляд:

$$t_1(r) = \frac{r_0 r_4 (t_{m4} - t_{m0})}{r_0 - r_4} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right) + \frac{t_{m0} r_0 - t_{m4} r_4}{r_0 - r_4}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи значення величин отримаємо

$$t_1(r) = \frac{1,2 \cdot 2 (20 - 500)}{1,2 - 2} \left( \frac{1}{1,2} + \frac{0,2113}{1,25} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{1,2} \right) \right) + \frac{500 \cdot 1,2 - 20 \cdot 2}{1,2 - 2} \quad \text{або}$$

$$t_1(r) = \frac{243,409}{r} + 297,159, \quad (1,2 \leq r \leq 1,5).$$

Значення температур на граничних поверхнях першого шару дорівнює

$$t_1(1,2) = \frac{243,409}{1,2} + 297,159 = 500^\circ \text{C}, \quad t_1(1,5) = 459,432^\circ \text{C}.$$

Густину теплового потоку в першому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_1(r) = -\lambda_1 \text{grad} t_1(r)$  або  $q_1(r) = -1,25 \frac{(-243,409)}{r^2} = \frac{304,26}{r^2}$ .

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню першого шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 304,26 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

Розподіл температурного поля в другому шарі описується формулою:

$$t_2(r) = \frac{r_0 r_4 (t_{m4} - t_{m0})}{r_0 - r_4} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \right) + \frac{t_{m0} r_0 - t_{m4} r_4}{r_0 - r_4}, \quad (r_1 \leq r \leq r_2).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_2(r) = \frac{7,244}{r} + 454,602, \quad (1,5 \leq r \leq 1,65).$$

Значення температур на граничних поверхнях другого шару дорівнює

$$t_2(1,4) = 459,432^\circ \text{C}, \quad t_2(1,65) = 458,993^\circ \text{C}.$$

Густину теплового потоку в другому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_2(r) = -\lambda_2 \text{grad} t_2(r)$  або  $q_2(r) = -42 \frac{(-7,244)}{r^2} = \frac{304,26}{r^2}$ .

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню другого шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 304,26 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

Розподіл температурного поля в третьому шарі визначається формулою:

$$t_3(r) = \frac{r_0 r_4 (t_{m4} - t_{m0})}{r_0 - r_4} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_3} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right) +$$

$$+ \frac{t_{m0}r_0 - t_{m4}r_4}{r_0 - r_4}, \quad (r_2 \leq r \leq r_3).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_3(r) = \frac{5433,249}{r} - 2833,886, \quad (1,65 \leq r \leq 1,9).$$

Значення температур на граничних поверхнях третього шару дорівнює

$$t_3(1,65) = 458,993^{\circ}C, \quad t_3(1,9) = 25,719^{\circ}C.$$

Густина теплового потоку в третьому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_3(r) = -\lambda_3 \text{grad}t_3(r)$  або  $q_3(r) = -0,056 \frac{(-5433,249)}{r^2} = \frac{304,26}{r^2}$ .

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню третього шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 304,26 \frac{\text{Дж}}{c}$ .

Розподіл температурного поля в четвертому шарі визначається за формулою:

$$t_4(r) = \frac{r_0 r_4 (t_{m4} - t_{m0})}{r_0 - r_4} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_3} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_4} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) \right) + \frac{t_{m0}r_0 - t_{m4}r_4}{r_0 - r_4}, \quad (r_3 \leq r \leq r_4).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_4(r) = \frac{217,33}{r} - 88,665, \quad (1,9 \leq r \leq 2).$$

Значення температур на граничних поверхнях четвертого шару дорівнює

$$t_4(1,9) = 25,72^{\circ}C, \quad t_4(2) = 20^{\circ}C.$$

Густина теплового потоку в четвертому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_4(r) = -\lambda_4 \text{grad}t_4(r)$  тоді

$$q_4(r) = -1,4 \frac{(-217,33)}{r^2} = \frac{304,26}{r^2}.$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню четвертого шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 304,26 \frac{\text{Дж}}{c}$ .

Задача 7. Враховуючи умову задачі 6, визначити розподіл температурного поля в чотиришаровій сферичній стінці, якщо на внутрішній і зовнішній поверхнях сфери існує конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем. Температура навколишнього середовища всередині сфери  $t_{p0} = 500^{\circ}C$  і зовні –  $t_{p4} = 20^{\circ}C$ . Коефіцієнти теплообміну між навколишнім середовищем і поверхнями сфери дорівнюють  $\alpha_0 = 18 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$  і  $\alpha_4 = 8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ .

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності багат шарової сфери за наявності ідеального теплового контакту між шарами визначаємо за формулою (73). Для чотиришарової сфери формула набере вигляду:

$$\frac{r_1 - r_0}{\lambda_1 r_1 r_0} + \frac{r_2 - r_1}{\lambda_2 r_2 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\lambda_3 r_3 r_2} + \frac{r_4 - r_3}{\lambda_4 r_4 r_3} = \frac{r_4 - r_0}{\lambda_y r_4 r_0}.$$

Підставляючи значення величин отримаємо  $\lambda_y = 0,2113 \frac{Bm}{m \cdot K}$ .

Розподіл температурного поля по товщині багат шарової сфери за наявності ідеального теплового контакту між шарами та граничних умов третього типу визначаємо за формулою (89).

Отже, розподіл температурного поля в першому шарі сфери описується формулою:

$$t_1(r) = \frac{(t_{p0} - t_{p4}) \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} - \frac{1}{r_4} \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_4}}, (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_1(r) = \frac{233,092}{r} + 294,516, \quad (1,2 \leq r \leq 1,5).$$

Значення температур на граничних поверхнях першого шару дорівнює

$$t_1(1,2) = \frac{233,092}{1,2} + 294,516 = 488,759^{\circ}C, \quad t_1(1,5) = 449,91^{\circ}C.$$

Густина теплового потоку в першому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_1(r) = -\lambda_1 grad t_1(r)$  тоді  $q_1(r) = -1,25 \frac{(-233,092)}{r^2} = \frac{291,365}{r^2}$ .

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню першого шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 291,365 \frac{Дж}{c}$ .

Розподіл температурного поля в другому шарі сфери описується формулою:

$$t_2(r) = \frac{(t_{p0} - t_{p4}) \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} - \frac{1}{r_4} \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_4}}, (r_1 \leq r \leq r_2).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_2(r) = \frac{6,937}{r} + 445,286, \quad (1,5 \leq r \leq 1,65).$$

Значення температур на граничних поверхнях другого шару дорівнює

$$t_2(1,5) = 449,91^{\circ}C, \quad t_2(1,65) = 449,49^{\circ}C.$$

Густина теплового потоку в другому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_2(r) = -\lambda_2 grad t_2(r)$  тоді  $q_2(r) = -42 \frac{(-6,937)}{r^2} = \frac{291,365}{r^2}$ .



Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню другого шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 291,365 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

Розподіл температурного поля в третьому шарі сфери описується формулою:

$$t_3(r) = \frac{(t_{p0} - t_{p4}) \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_3} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_4}} + \frac{t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} - \frac{1}{r_4} \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_4}}, \quad (r_2 \leq r \leq r_3).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_3(r) = \frac{5202,947}{r} - 2703,811, \quad (1,65 \leq r \leq 1,9).$$

Значення температур на граничних поверхнях третього шару дорівнює

$$t_3(1,65) = 449,49^\circ \text{C}, \quad t_3(1,9) = 34,582^\circ \text{C}.$$

Густину теплового потоку в третьому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_3(r) = -\lambda_3 \text{grad} t_3(r)$  або  $q_3(r) = -0,056 \frac{(-5202,947)}{r^2} = \frac{291,365}{r^2}$ .

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню третього шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 291,365 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

Розподіл температурного поля в четвертому шарі сфери описується формулою:

$$t_4(r) = \frac{(t_{p0} - t_{p4}) \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_3} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_4} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_4}} + \frac{t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} - \frac{1}{r_4} \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right)}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0 r_0^2} + \frac{\lambda_y}{\alpha_4 r_4^2} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_4}}, \quad (r_3 \leq r \leq r_4).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_4(r) = \frac{208,118}{r} - 74,954, \quad (1,9 \leq r \leq 2).$$

Значення температур на граничних поверхнях четвертого шару дорівнює

$$t_4(1,9) = 34,582^\circ \text{C}, \quad t_4(2) = 29,105^\circ \text{C}.$$

Густину теплового потоку в четвертому шарі визначаємо використовуючи закон Фур'є  $q_4(r) = -\lambda_4 \text{grad}t_4(r)$  тоді

$$q_4(r) = -1,4 \frac{(-208,118)}{r^2} = \frac{291,365}{r^2}.$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка переходить за час  $\tau$  через сферичну поверхню четвертого шару радіуса  $r$ , дорівнює  $Q(r) = 4\pi r^2 q_1 \tau = 4\pi \tau \cdot 291,365 \frac{\text{Дж}}{c}$ .

## Тема 4. Нестационарна теплопровідність

**Нестационарна теплопровідність** називають процес поширення теплоти внаслідок безпосереднього контакту частинок з різною температурою і характер поширення теплоти змінюється із плином часу. Нестационарна теплопровідність характеризується зміною температурного поля в тілі. У практиці пожежної справи частіше доводиться вирішувати задачі пов'язані з нагріванням тіл, оскільки процес пожежі супроводжується значним тепловиділенням. Значний прогрів будівельних конструкцій може привести до втрати їх функціональних обов'язків або руйнування. Розподіл температурного поля в ізотропному тілі, коли відсутні внутрішні джерела теплоти і коефіцієнт теплопровідності є величиною сталою, описується відповідними диференціальними рівняннями. В залежності від вибору системи координат диференціальні рівняння матимуть вигляд:

$$\frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (90)$$

в декартовій системі координат;

$$\frac{\partial^2 t(r, \varphi, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r, \varphi, z, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t(r, \varphi, z, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t(r, \varphi, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t(r, \varphi, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (91)$$

в циліндричній системі координат;

$$\frac{\partial^2 t(r, \varphi, \psi, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t(r, \varphi, \psi, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial t(r, \varphi, \psi, \tau)}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 t(r, \varphi, \psi, \tau)}{\partial \psi^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t(r, \varphi, \psi, \tau)}{\partial \tau} \quad (92)$$

в сферичній системі координат,

де  $t$  – температура,  $[t] = K$  або  $[t] = ^\circ C$ ;  $x, y, z, r, \varphi, \psi$  – координати,  $[x] = m$ ,  $[y] = m$ ,  $[z] = m$ ;  $[r] = m$ ;  $[\varphi] = \text{радіан}$ ;  $[\psi] = \text{радіан}$ ;  $\tau$  – час,  $[\tau] = c$ ;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності,  $[a] = \frac{m^2}{c}$ .

Коефіцієнт температуропровідності є фізичним параметром речовини і його значення визначається за формулою

$$a(t) = \frac{\lambda(t)}{c_p(t)\rho},$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності речовини,  $[\lambda] = \frac{Вт}{м \cdot К}$ ;  $\rho$  – питома густина речовини,  $[\rho] = \frac{кг}{м^3}$ ;  $c_p$  – питома теплоємність речовини,  $[c_p] = \frac{Дж}{кг \cdot К}$ .

Коефіцієнт температуропровідності характеризує швидкість зміни температури в тілі. Чим більший коефіцієнт температуропровідності, тим швидше тіло нагрівається. Значення коефіцієнта температуропровідності залежить від температури тіла, оскільки із зміною температури тіла змінюється значення коефіцієнта теплопровідності та теплоємності. Теплоємність тіл, переважно, зростає із збільшенням середньої температури за лінійним законом

$$c_p(t_{cp}) = c_0 + \beta t_{cp},$$

де:  $c_0$  – теплоємність тіла з температурою  $0^{\circ}C$ ;  $\beta$  – коефіцієнт встановлений експериментальним шляхом;  $t_{cp} = \frac{t_{m,\tau} + t_{x,\tau}}{2}$  – середня температура тіла в момент часу  $\tau$ ;  $t_{m,\tau}$  – температура на поверхні тіла в момент часу  $\tau$ ;  $t_{x,\tau}$  – температура в шуканій точці тіла в момент часу  $\tau$ .

Коефіцієнт температуропровідності залежить від вологості речовини. Для вологих тіл коефіцієнт температуропровідності менший і тіло повільніше нагрівається, оскільки частина теплоти витрачається на нагрівання та випаровування рідини. Врахування впливу вологості речовини на зміну фізичних параметрів тіла в нестационарному тепловому режимі значно ускладнює розрахунки і тому розглядається окремо.

Розв'язання задачі нестационарної теплопровідності означає визначення розподілу температурного поля в тілі  $t(x, y, z, \tau)$ , яке задовольняє одне з диференціальних рівняння (90) – (92) та відповідні початкову і граничні умови.

**Початкова умова** – вказується розподіл температурного поля в тілі в момент часу  $\tau = 0$ . *Наприклад,*

$$t(x, y, z, 0) = f_0(x, y, z), \quad (93)$$

де  $f_0(x, y, z)$  відома функція і координати  $x, y, z$  задовольняють рівняння яке описує зовнішню поверхню тіла.

Окрім початкової умови на подальший розподіл температурного поля суттєвий вплив мають граничні умови. **Граничні умови** – це відомості про характер зовнішнього теплового впливу на тіло. Граничні умови переважно поділяють на три типи.

**Гранична умова першого типу.** В цьому випадку задається розподіл температури на поверхні тіла в довільний момент часу. *Наприклад,*

$$t_m(x, y, z, \tau) = f_1(x, y, z, \tau), \quad (94)$$

де  $f_1(x, y, z, \tau)$  відома функція.

**Гранична умова другого типу.** На поверхні тіла задаються відомості про величину теплового потоку, який впливає на розподіл температурного поля в тілі. *Наприклад,*

$$-\lambda \frac{\partial t_m(x, y, z, \tau)}{\partial n} = q(x, y, z, \tau), \quad (95)$$

де  $\frac{\partial t_m}{\partial n}$  – градієнт температури на поверхні тіла,  $q(x, y, z, \tau)$  – густина теплового потоку і вона є відома функція.

**Гранична умова третього типу.** В цьому випадку на поверхні тіла задається конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем. *Наприклад,*

$$-\lambda \frac{\partial t_m(x, y, z, \tau)}{\partial n} = \alpha(t_m(x, y, z, \tau) - t_p(x, y, z, \tau)). \quad (96)$$

Функція  $t_p(x, y, z, \tau)$ , яка описує розподіл температури в навколишньому середовищі за межами теплового пограничного шару, відома;  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну між навколишнім середовищем і поверхнею тіла.

Інколи граничну умову задають як інтерпретацію ідеально теплоізолюваної поверхні. **Ідеально теплоізолюваною** поверхнею називають поверхню через яку не переходить тепловий потік, тобто виконується рівняння

$$\frac{\partial t_m(x, y, z, \tau)}{\partial n} = 0. \quad (97)$$

### **Опис контакту тіл з навколишнім середовищем**

Тепловий контакт між твердими тілами вважають **ідеальним**, якщо виконуються умови рівності температур на поверхні контакту тіл та рівність теплових потоків через поверхню контакту тіл, тобто виконуються рівняння

$$t_{1m}(x, y, z, \tau) = t_{2m}(x, y, z, \tau); \quad \lambda_1 \frac{\partial t_{1m}(x, y, z, \tau)}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial t_{2m}(x, y, z, \tau)}{\partial n}, \quad (98)$$

де  $t_{im}(x, y, z, \tau)$  – температури на поверхні контакту 1 і 2 тіл;  $\lambda_i$  – коефіцієнти теплопровідності 1 і 2 тіл.

Тепловий контакт між твердими тілами вважають **неідеальним**, якщо виконується умова рівності теплового потоку через поверхню контакту тіл, але не виконується умова рівності температур на поверхні контакту тіл і має місце конвекційний теплообмін на поверхні контакту тіл, тобто виконуються рівняння

$$\lambda_1 \frac{\partial t_{1m}(x, y, z, \tau)}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial t_{2m}(x, y, z, \tau)}{\partial n},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_{1m}(x, y, z, \tau)}{\partial n} = \alpha(t_{2m}(x, y, z, \tau) - t_{1m}(x, y, z, \tau)); \quad (99)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну (тепловіддачі) між тілами.

Для випадку якщо тверде тіло омивається рідиною то гранична умова подається у вигляді:

$$-\lambda \frac{\partial t_m(x, y, z, \tau)}{\partial n} = \alpha(t_m(x, y, z, \tau) - t_p(x, y, z, \tau)), \quad (100)$$

де коефіцієнт теплообміну  $\alpha$  залежить від багатьох факторів, але для спрощення його вважають сталою величиною;  $t_p(x, y, z, \tau)$  – температура рідини за межами теплового приповерхневого шару.

Для розв'язування задач нестационарної теплопровідності використовують аналітичні методи (метод відокремлення змінних, перетворення Лапласа та інші інтегральні перетворення) і чисельні методи (метод сіток та інші). Ці розрахунки є надто ускладненими і розглядаються окремо.

## Тема 5. Конвекційний теплообмін

**Конвекційний перенос теплоти** – це перенос теплоти викликаний переміщенням маси рідини від однієї області простору до іншої. Рідиною в термодинаміці вважають як крапельні рідини – воду, гас, нафту, бензин та інші, так і гази – метан, азот, повітря та інші. Конвекція теплоти завжди супроводжується теплопровідністю оскільки під час руху рідини або газу відбувається контакт між частинками рідини з різною температурою внаслідок чого відбувається передача теплоти від більш нагрітої частинки до менш нагрітої. Отже, **конвекційний теплообмін** поєднує конвекцію теплоти та теплопровідність. Залежно від сил, що викликають рух рідини, конвекцію поділяють на вільну та вимушену. **Вільна конвекція** виникає внаслідок різниці питомого об'єму гарячих і холодних частинок рідини, що викликає появу виштовхуючої сили, тобто вільна конвекція обумовлена неоднорідністю температурного поля. **Вимушена конвекція** відбувається завдяки дії зовнішніх чинників, які спричиняють рух рідини.

### *Диференціальне рівняння тепловіддачі*

**Тепловіддачею** називають процес теплообміну між рухомою рідиною та поверхнею нерухомого тіла.

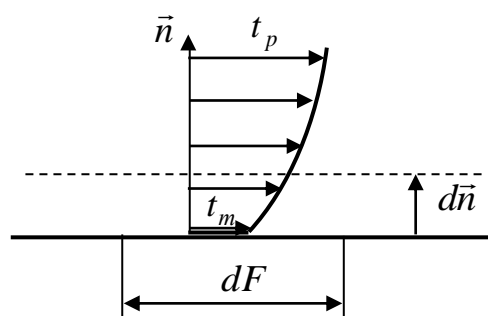


Рис. 9. Розподіл температурного поля в околі поверхні тіла

Розглядаємо поверхню тіла  $F$  по якій ковзає рідина. Виокремимо на цій поверхні тіла малий елемент  $dF$ , нормаль до якого  $\vec{n}$ . Температуру поверхні тіла позначимо  $t_m$ , а температуру рідини на великій віддалі від поверхні тіла, тобто за межами теплового приповерхневого шару, –  $t_p$ . На поверхні тіла упродовж усього часу ковзання рідини перебуває доволі тонкий шар рідини, що є нерухомим, мовби приклеєний до поверхні тіла. За ним міститься тонкий шар рідини, яка здійснює ламінарний рух. Передача теплоти через цих два шари може здійснюватись лише шляхом теплопровідності. Інтенсивність

теплообміну між рідиною і тілом визначається в основному теплопровідністю через тепловий при поверхневий шар, товщина якого може дорівнювати 1 – 2 мм. Отже, густина теплового потоку через ці шари в елемент поверхні  $dF$ , згідно закону теплопровідності Фур'є, дорівнює

$$q = -\lambda_p \frac{dt_p}{dn}, \quad (101)$$

де  $\lambda_p$  – коефіцієнт теплопровідності рідини,  $\frac{dt_p}{dn}$  – градієнт температури в при поверхневому тепловому шарі рідини. Визначити градієнт температури доволі важко, тому вводиться поняття коефіцієнта тепловіддачі (теплообміну)  $\alpha$ , який

визначається з рівняння 
$$\alpha = \frac{q}{t_p - t_m}. \quad (102)$$

Коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  мало залежить від температурного перепаду  $t_p - t_m$ , якщо теплофізичні характеристики тіла та рідини суттєво не змінюються в цьому діапазоні температур. **Коефіцієнт теплообміну** (теповіддачі)  $\alpha$  чисельно дорівнює густині теплового потоку між рідиною та поверхнею тіла, якщо перепад температур 1К. Розмірність коефіцієнта тепловіддачі  $[\alpha] = \frac{Wm}{m^2 \cdot K}$ .

Коефіцієнт тепловіддачі залежить від багатьох факторів: фізичних властивостей рідини (в'язкість, густина, теплопровідність, теплоємність); швидкості руху рідини, із збільшенням швидкості руху рідини коефіцієнт тепловіддачі зростає; форми тіла по якому ковзає рідина; ступінь нерівностей поверхні тіла; ламінарний чи турбулентний рух рідини. Коефіцієнт тепловіддачі не є фізичним параметром рідини на відміну, *наприклад*, від коефіцієнта теплопровідності рідини. Рідина рухається **ламінарно**, якщо шари рідини під час руху не перемішуються. Під час ламінарного руху рідини теплообмін між рідиною та тілом здійснюється лише завдяки теплопровідності. Рідина рухається **турбулентно**, якщо існує вихровий неупорядкований рух частинок рідини. Під час турбулентного руху рідини існує: тонкий шар рідини, який не рухається і він мовби приклеєний до поверхні тіла; шар рідини, який рухається ламінарно вздовж поверхні тіла; і на певній віддалі від поверхні тіла рідина рухається турбулентно. Від сумарної товщини нерухомого та ламінарного шарів залежить величина термоопору. Під час турбулентного руху теплота всередині потоку в основному поширюється перемішуванням рідини, а в околі поверхні тіла – теплопровідністю. Отже, тепловіддача під час турбулентного руху рідини відбувається більш інтенсивно ніж під час ламінарного руху рідини.

Враховуючи залежності (101) і (102) отримаємо, що  $-\lambda_p \frac{dt_p}{dn} = \alpha(t_p - t_m)$ . Оскільки величина теплового потоку, який вливається в тіло, дорівнює величині теплового потоку, що покидає рідину, то справедлива рівність  $\lambda_p \frac{dt_p}{dn} = \lambda_m \frac{dt_m}{dn}$ . Отже, попереднє рівняння набере вигляду

$$-\lambda_m \frac{dt_m}{dn} = \alpha(t_p - t_m). \quad (103)$$

Це рівняння називають **рівнянням тепловіддачі (теплообміну)**. Оскільки визначити градієнт температури в тепловому приповерхневому шарі тіла доволі проблематично, то коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$ , величина якого залежить від багатьох факторів, визначають експериментально за допомогою теорії подібності.

### ***Теорія подібності***

Під час вивчення конвекційного теплообміну основною задачею є визначення величини коефіцієнта тепловіддачі  $\alpha$ . Визначення величини коефіцієнта тепловіддачі теоретичним шляхом пов'язане з великими труднощами і тому його переважно визначають експериментальним шляхом або використовують теорію подібності. **Теорія подібності** – наука про подібність фізичних явищ. Вона являє собою теорію опрацювання та узагальнення результатів експериментів. Вона дозволяє проводити дослідження не на самих об'єктах а на їх моделях і результати дослідів переносити на об'єкт. Подібності бувають: геометрична, кінематична, динамічна і тепла. Геометрична подібність розглядає подібність геометричних фігур. В таких об'єктах відповідні сторони пропорційні, а відповідні кути рівні. Кінематична подібність – це подібність полів швидкостей руху двох потоків. Динамічна подібність – подібність сил, що формують подібний розподіл швидкостей та пришвидшень руху об'єктів. **Теплова подібність** – подібність температурних полів та теплових потоків.

Необхідні умови подібності:

- подібні явища повинні відноситись до одного й того ж класу (типу) явищ;

- мати однакою фізичну природу та описуватися однакою формою та змістом диференціальними рівняннями. Якщо математичний опис двох явищ однакою формою, але різний за фізичним змістом, то такі явища називають аналогічними.

- подібні явища завжди відбуваються в геометрично подібних областях;

- під час аналізу подібних явищ можна порівнювати між собою тільки однорідні фізичні величини і лише у відповідні моменти часу та у відповідних просторових координатах.

**Однорідними величинами** називають такі величини, котрі мають один і той самий фізичний зміст та однакою розмірність.

### ***Числа подібності***

Теорія подібності стверджує, що для довільного теплообміну існує однозначна залежність між певними безрозмірними комплексами величин, котрі характеризують процеси теплообміну. Ці комплекси величин і параметрів мають однакою значення для всіх подібних процесів і називаються числами

подібності. **Числа подібності** – це безрозмірні комплекси, які поєднують величини, що характеризують те чи інше явище.

**Число Нуссельта** –  $Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі,

$[\alpha] = \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$ ;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $[\lambda] = \frac{Вт}{м \cdot К}$ ;  $l$  – характерний розмір тіла,  $[l] = м$ . Число Нуссельта характеризує тепловіддачу на границі рідина – тверде тіло. Воно характеризує відношення кількості теплоти, переданої конвекцією, до кількості теплоти, переданої теплопровідністю через шар рідини товщиною  $l$ . Чим більше число  $Nu$  тим інтенсивніший процес конвекційного теплообміну.

**Число Рейнольдса** –  $Re = \frac{wl}{\nu}$  або  $Re = \frac{\rho lw}{\mu}$ , де  $w$  – швидкість руху

рідини,  $[w] = \frac{м}{с}$ ;  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини,  $[\nu] = \frac{м^2}{с}$ ;

$\rho$  – питома густина рідини,  $[\rho] = \frac{кг}{м^3}$ ;  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості

рідини,  $[\mu] = \frac{Па \cdot с}{с}$ . Якщо рідина рухається всередині каналу, то число

Рейнольдса визначається за формулою –  $Re = \frac{wd}{\nu}$ , де  $d$  внутрішній діаметр

каналу. Для випадку коли переріз каналу не круглий підставляється значення ефективного діаметра, який визначається за формулою  $d_{ef} = \frac{4F}{P}$ .  $F$  – площа

поперечного перерізу каналу в якому рухається рідина.  $P$  – внутрішній периметр перерізу каналу. Число Рейнольдса характеризує відношення сил інерції до сил в'язкості в потоці рідини, та вказує на гідродинамічний режим руху рідини. Якщо  $Re < 2300$  то рух рідини ламінарний, при  $Re > 10^4$  рух рідини турбулентний. При  $2300 < Re < 10^4$  рух рідини включає елементи ламінарного та турбулентного рухів.

**Число Прандтля** –  $Pr = \frac{\nu}{a}$ , де  $\nu$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості

рідини,  $[\nu] = \frac{м^2}{с}$ ;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності рідини,  $[a] = \frac{м^2}{с}$ . Це

число є параметром стану речовини і для нього можуть бути складені таблиці. Число Прандтля характеризує відношення величини гідродинамічного до величини теплового приповерхневих шарів. Для газів число Прандтля змінюється в межах  $Pr = 0,67 - 1,0$  і залежить від атомності газу та незначно змінюється під час зміни температури. Для рідин число Прандтля лежить в межах  $Pr = 1,0 - 2500$  і залежність від температури суттєва.



**Число Грасгофа**  $-Gr = \frac{g\beta \cdot l^3 \Delta t}{\nu^2}$ , де  $\beta$  – температурний коефіцієнт об'ємного розширення рідини (газу) під сталим тиском,  $[\beta] = K^{-1}$ ; для ідеального газу  $\beta = T^{-1}$ ;  $\Delta t = t_p - t_m$ ,  $t_p$  – температура рідини за межами теплового при поверхневого шару,  $t_m$  – температура на поверхні тіла;  $g$  – пришвидшення вільного падіння тіла,  $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$ . Число Грасгофа – відношення сил тяжіння, у нерівномірному нагрітому середовищі, до сил в'язкості. Чим більше значення числа  $Gr$  тим інтенсивніший вільний рух рідини. Під час вимушеного руху рідини вплив вільної конвекції незначний і критерій Грасгофа можна не враховувати.

**Критерій Пекле** –  $Pe = \frac{wl}{a}$ . Це відношення теплоти, яка переноситься конвекцією до теплоти, яка передається теплопровідністю.

У всіх формулах наведених чисел (критеріїв) буквою  $l$  позначається лінійний параметр поверхні теплообміну,  $[l] = m$ . Під час руху рідини всередині циліндричного каналу замість  $l$  підставляють значення діаметра  $d$  або  $d_{ef}$ .

Для визначення коефіцієнта тепловіддачі використовують рівняння типу  $Nu = C \cdot Re^n Pr^m$  або  $Nu = C(Gr \cdot Pr)^m$ . Перше рівняння характеризує конвекційний теплообмін під час вимушеного руху рідини або газу всередині або зовні труби. Друге – під час вільного руху, який виникає внаслідок нерівномірного температурного поля.  $C$ ,  $m$ ,  $n$  – сталі величини, які визначаються внаслідок опрацювання експериментальних даних і залежать від характеру руху рідини.

### ***Визначення коефіцієнта теплообміну***

Тепловіддача під час вимушеного руху рідини, якщо рідина рухається ламінарно. Середнє значення коефіцієнта тепловіддачі для пластини довжиною  $l$  обчислюється використовуючи формулу, отриману аналітичним способом

$$Nu_l = 0,66 \sqrt{Re_l} \sqrt[3]{Pr}, \quad (104)$$

де  $Nu_l = \frac{\alpha l}{\lambda}$  і  $Re_l = \frac{wl}{\nu}$ ,  $Pr = \frac{\nu}{a}$ ,  $\alpha$  – середнє значення коефіцієнта тепловіддачі (теплообміну);  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності рідини;  $w$  – швидкість рідини за межами гідродинамічного приповерхневого шару;  $\nu$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності рідини. У формулі (104) фізичні параметри вважаються незалежними від температури.

Тепловіддача під час вимушеного руху рідини, якщо рідина рухається турбулентно. Внаслідок узагальнення численних досліджень тепловіддачі під час повздовжнього обтікання пластини різними рідинами була отримана формула для визначення середнього коефіцієнта тепловіддачі

$$Nu_{lp} = 0,037 Re_{lp}^{0,8} Pr_p^{0,43} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25}. \quad (105)$$

Індекс « $p$ » вказує, що фізичні параметри рідини необхідно брати при температурі з якою рідина починає омивати пластину. Індекс « $m$ » – при температурі поверхні пластини. Індекс  $l$  вказує, що за характерний розмір тіла необхідно взяти довжину пластини, по якій ковзає рідина. Для повітря та інших двоатомних газів число Прандтля не суттєво залежить від температури і тому можна вважати, що  $Pr_p / Pr_m = 1$

Тепловіддача під час вимушеного руху рідини, якщо рідина рухається ламінарно в прямолінійних трубах. Під час руху рідини в трубі коефіцієнт тепловіддачі по довжині труби є змінною величиною і зменшується в напрямку руху рідини. Для визначення середнього по довжині коефіцієнта тепловіддачі з ламінарним рухом рідини в прямих трубах використовується емпірична формула:

$$Nu_{dp} = 0,17 Re_{dp}^{0,33} Pr_p^{0,43} Gr_{dp}^{0,1} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25} \varepsilon_l. \quad (106)$$

В цьому рівнянні індекс « $p$ » вказує, що фізичні параметри необхідно вибирати залежно від середньої температури рідини  $t_p$ , де  $t_p = 0,5(t_1 + t_2)$ ,  $t_1$  і  $t_2$  температури рідини на вході та виході з труби. Індекс « $d$ » вказує, що в якості характерного розміру тіла необхідно брати внутрішній діаметр труби. Для випадків коли переріз каналу не круглий, підставляється значення ефективного діаметра, який визначається за формулою  $d_{ef} = \frac{4F}{P}$ .  $F$  – площа поперечного перерізу каналу по якому рухається рідина.  $P$  – внутрішній периметр перерізу каналу. Відношення  $\frac{Pr_p}{Pr_m}$  характеризує напрямок теплового потоку. Значення  $Pr_m$  береться з таблиць фізичних властивостей рідини з середньою температурою внутрішньої поверхні труби.

У формулі (106)  $Nu_{dp} = \frac{\alpha d}{\lambda_p}$ ,  $Re_{dp} = \frac{wd}{\nu_p} = \frac{4G}{\pi d \mu_p}$ ,  $Gr_{dp} = \frac{g \beta \Delta t d^3}{\nu_p^2}$ , де  $G$  – секундна масова витрата рідини,  $\mu_p$  – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини,  $\alpha$  – середній коефіцієнт тепловіддачі,  $\nu$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини. Множник  $\varepsilon_l$  враховує відношення довжини труби до її діаметра. Значення  $\varepsilon_l$  залежно від величини  $l/d$  вказані в таблиці:

$l/d$	1	2	5	10	15	20	30	40	50 і >
$\varepsilon_l$	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1,0

Для повітря та інших двоатомних газів число Прандтля не залежить суттєво від температури і тому  $Pr_p / Pr_m = 1$ , тоді число Нуссельта визначається за формулою

$$Nu_{dp} = 0,15 Re_{dp}^{0,33} Gr_{dp}^{0,1} \varepsilon_l. \quad (107)$$

Тепловіддача під час вимушеного руху рідини, якщо рідина рухається турбулентно в прямолінійних трубах. Внаслідок численних експериментів отримано формулу, яка описує тепловіддачу в гладкій трубці з турбулентним рухом рідини:

$$Nu_{dp} = 0,021 Re_{dp}^{0,8} Pr_p^{0,43} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25} \varepsilon_l. \quad (108)$$

В цій залежності  $Nu_{dp} = \frac{\alpha d}{\lambda_p}$ ,  $Re_{dp} = \frac{wd}{v_p} = \frac{4G}{\pi d \mu_p}$ . Індекс « $p$ » вказує, що фізичні параметри необхідно вибирати залежно від середньої температури рідини  $t_p$ , де  $t_p = 0,5(t_1 + t_2)$ ,  $t_1$  і  $t_2$  температури рідини на вході та виході з труби. Індекс « $m$ » вказує, що параметр рідини необхідно взяти при середній температурі поверхні тіла. Індекс « $d$ » вказує, що в якості характерного розміру тіла необхідно брати внутрішній діаметр труби.  $G$  – секундна масова витрата рідини через канал.  $\alpha$  – середній коефіцієнт тепловіддачі. Значення  $\varepsilon_l$  залежно від величини числа Рейнольдса і  $l/d$  вказані в таблиці:

$Re_d$	Значення $\varepsilon_l$ при відношенні $l/d$				
	10	20	30	40	50
$10^4$	1,23	1,13	1,07	1,03	1
$10^5$	1,10	1,06	1,03	1,02	1
$10^6$	1,05	1,03	1,02	1,01	1

Для газів, при малих швидкостях руху ( $M < 0,3$ ), число Нуссельта дорівнює

$$Nu_{dp} = 0,021 Re_{dp}^{0,8} Pr_p^{0,43} \varepsilon_l. \quad (109)$$

Тепловіддача під час вільного руху рідини вздовж вертикальної стінки та наявності ламінарного приповерхневого шару. Середнє значення числа Нуссельта, для ділянки поверхні довжиною  $l$ , дорівнює

$$Nu_{lp} = \frac{2,032}{3} \left( \frac{Pr_p}{0,952 + Pr_p} \right)^{0,25} (Gr_{lp} Pr_p)^{0,25}. \quad (110)$$

Ця формула використовується, якщо  $10^3 \leq Gr_{lp} Pr_p \leq 10^9$ , де  $Pr_p = \frac{\nu}{a}$ ,

$Nu_{lp} = \frac{\alpha l}{\lambda_p}$ ,  $Gr_{lp} = \frac{\beta g (t_p - t_m) l^3}{\nu_p^2}$ ,  $t_p$  – температура рідини за межами теплового приповерхневого шару,  $t_m$  – температура поверхні тіла. Індекс « $p$ » вказує, що значення фізичних параметрів рідини вибираються при температурі рідини за межами теплового приповерхневого шару. Індекс « $l$ » вказує, що за характерний розмір тіла взято висоту вертикальної стінки.

Тепловіддача під час вільного руху рідини вздовж вертикальної стінки та наявності турбулентного приповерхневого шару. Внаслідок опрацювання результатів численних дослідів отримано формули для визначення числа Нуссельта під час вільного турбулентного руху рідини вздовж вертикальної стінки. Якщо  $10^3 < Gr_p Pr_p < 10^9$  і температура на поверхні тіла стала, то

$$Nu_{lp} = 0,73 (Gr_{lp} Pr_p)^{0,25} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25}. \quad (111)$$

Якщо  $Gr_p Pr_p \geq 6 \cdot 10^{10}$ , то число Нуссельта визначається за формулою:

$$Nu_{lp} = 0,15 (Gr_{lp} Pr_p)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25}, \quad (112)$$

де  $Gr_{lp} = \frac{\beta g (t_p - t_m) l^3}{\nu^2}$ ,  $Pr_p = \frac{\nu}{a}$ ,  $Nu_{lp} = \frac{\alpha l}{\lambda_p}$ ,  $t_p$  – температура рідини за межами

приповерхневого теплового шару;  $t_m$  – температура поверхні тіла. Індекс « $p$ » вказує, що значення фізичних параметрів рідини вибираються при температурі рідини за межами теплового приповерхневого шару. Індекс « $l$ » вказує, що за характерний розмір тіла взято висоту вертикальної стінки.

Формули для визначення числа Нуссельта, при тепловіддачі вздовж вертикальних стінок, можна використати якщо рідина ковзає вздовж вертикальних циліндричних стінок.

Орієнтовні межі зміни коефіцієнтів тепловіддачі (теплообміну) вказано в таблиці:

Умови конвекції	Границі значень $\alpha$ . $[\alpha] = \frac{Вт}{м^2 \cdot C}$
Рух газів під час вільної конвекції	6 – 120
Рух вода під час вільної конвекції	120 – 1160
Рух газів в трубах або між трубами	12 – 360
Рух води в трубах або між трубами	60 – 11600
Кипіння води в трубах	2300 – 30000
Плівкова конденсація водяної пари	4600 – 17500

### Методика розв'язування задач

Задача 1. Зовні будинку рухається повітря з швидкістю  $w = 1 \text{ см/с}$ .

Температура повітря  $t_p = 20^{\circ}C$ . Довжина стіни, яку обдуває повітря,  $l = 2,8 \text{ м}$ . Визначити коефіцієнт тепловіддачі між повітрям і стіною.

Фізичні параметри повітря при температурі  $t_p = 20^{\circ}C$  такі:

$\lambda = 2,59 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot K}$ ,  $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{с}$ ,  $Pr = 0,703$ . Визначаємо число Рейнольдса

за формулою  $Re_l = \frac{wl}{\nu}$ . Підставляючи значення величин отримаємо

$Re_l = \frac{0,01 \cdot 2,8}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 1859$ . Оскільки число Рейнольдса  $Re_l \leq 2300$ , то рух повітря

вздовж стіни ламінарний. Отже, тепловіддача відбувається під час вимушеного ламінарного руху рідини, тому число Нуссельта визначаємо за формулою

$Nu_l = 0,66\sqrt{Re_l}\sqrt[3]{Pr}$  або  $Nu_l = 0,66\sqrt{1859}\sqrt[3]{0,703}$ ,  $Nu_l = 25,303$ . Коефіцієнт тепловіддачі (теплообміну) між стіною та повітрям визначаємо за формулою  $\alpha = \frac{\lambda Nu_l}{l}$  Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$\alpha = \frac{2,59 \cdot 10^{-2} \cdot 25,303}{2,8} \text{ або } \alpha = 0,234 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}.$$

Задача 2. Вітер обдуває стіну довжиною  $l = 3 м$  з швидкістю  $w = 0,2 \frac{м}{с}$ , температура повітря  $t_p = -20^0 С$ . Визначити коефіцієнт тепловіддачі між повітрям і стіною.

Фізичні параметри повітря при температурі  $t_p = -20^0 С$  такі:

$$\lambda = 2,28 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot К}, \quad \nu = 12,79 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{с}, \quad Pr = 0,716.$$

Визначаємо число Рейнольдса за формулою  $Re_l = \frac{wl}{\nu}$ , тоді  $Re_l = \frac{0,2 \cdot 3}{12,79 \cdot 10^{-6}} = 46912$ . Оскільки число

Рейнольдса  $Re_l \geq 10000$ , то рух повітря вздовж стіни турбулентний. Отже, тепловіддача відбувається під час вимушеного турбулентного руху рідини, тому число Нуссельта визначаємо за формулою

$$Nu_l = 0,037 Re_{lp}^{0,8} Pr_p^{0,43} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25}.$$

Для повітря та інших двоатомних газів число Прандтля не залежить суттєво від температури і тому  $\frac{Pr_p}{Pr_m} = 1$ . Отже, попередня

формула набере вигляду  $Nu_l = 0,037 Re_{lp}^{0,8} Pr_p^{0,43}$ . Підставляючи дані отримаємо

$$Nu_l = 0,037 \cdot 46912^{0,8} \cdot 0,716^{0,43} \text{ або } Nu_l = 174,92.$$

Коефіцієнт тепловіддачі між стіною та повітрям дорівнює  $\alpha = \frac{\lambda Nu_l}{l}$  або  $\alpha = \frac{2,28 \cdot 10^{-2} \cdot 174,92}{3}$ ,

$$\alpha = 1,33 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}.$$

Задача 3. Водяна пара рухається в середині паропроводу із швидкістю  $w = 0,1 \frac{м}{с}$ . Температура пари  $t_p = 180^0 С$  і температура внутрішньої стінки паропроводу  $t_m = 160^0 С$ . Внутрішній діаметр паропроводу  $d = 5 см$ . Визначити значення коефіцієнта тепловіддачі між парою і стінкою паропроводу, якщо  $l/d > 50$ .

Фізичні параметри пари при температурі  $t_p = 180^0 С$  такі:

$$\lambda = 3,27 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot К}, \quad \nu_p = 2,93 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{с}, \quad Pr_p = 1,25, \quad Pr_m = 1,18.$$

Визначаємо число Рейнольдса за формулою  $Re_{dp} = \frac{wd}{\nu_p}$ , тоді  $Re_{dp} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{2,93 \cdot 10^{-6}} = 1706$ . Оскільки

число Рейнольдса  $Re_l < 2300$ , то рух газу всередині паропроводу ламінарний. Отже, тепловіддача відбувається під час вимушеного ламінарного руху рідини, тому число Нуссельта визначаємо за формулою

$$Nu_{dp} = 0,17 Re_{dp}^{0,33} Pr_p^{0,43} Gr_{dp}^{0,1} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25} \varepsilon_l. \text{ Для газів число Прандтля не залежить}$$

суттєво від температури і тому  $\frac{Pr_p}{Pr_m} = 1$ . Визначаємо число Грасгофа

$$Gr_{dp} = \frac{g\beta\Delta t d^3}{\nu_p^2}, \text{ де: } \Delta t = t_p - t_m \text{ і } \beta = \frac{1}{273 + 180} \text{ (коефіцієнт об'ємного}$$

розширення для газів). Підставляючи дані отримаємо

$$Gr_{dp} = \frac{9,81 \cdot \frac{1}{453} \cdot 20 \cdot 0,05^3}{(2,93 \cdot 10^{-6})^2} = 6306300.$$

Число Нуссельта враховуючи значення величин дорівнює

$$Nu_{dp} = 0,17 \cdot 1706^{0,33} \cdot 1,25^{0,43} \cdot 6306300^{0,1} \cdot \left( \frac{1,25}{1,18} \right)^{0,25} \text{ або } Nu_{dp} = 10,591.$$

Коефіцієнт тепловіддачі між стіною та парою дорівнює  $\alpha = \frac{\lambda_p Nu_{dp}}{d}$ , тому

$$\alpha = \frac{3,27 \cdot 10^{-2} \cdot 10,591}{0,05}, \alpha = 6,93 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}.$$

Задача 4. Димові газу рухаються всередині циліндричного каналу діаметром  $d = 0,2 м$  із швидкістю  $w = 4,2 \frac{м}{с}$ . Температура димових газів  $t_p = 200^{\circ}С$ . Визначити коефіцієнт тепловіддачі між димовими газами і стінкою циліндричного каналу, якщо  $\frac{l}{d} = 30$ .

Фізичні параметри димових газів при температурі  $t_p = 200^{\circ}С$  такі:

$$\rho = 0,748 \frac{кг}{м^3}, \lambda = 0,04 \frac{Вт}{м \cdot К}, \nu_p = 32,8 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{с}, Pr_p = 0,67. \text{ Визначаємо число}$$

Рейнольдса за формулою  $Re_{dp} = \frac{wd}{\nu_p}$ , тоді  $Re_{dp} = \frac{4,2 \cdot 0,2}{32,8 \cdot 10^{-6}} = 25610$ . Оскільки

число Рейнольдса  $Re_{dp} > 10000$ , то рух димових газів всередині циліндричного каналу турбулентний. Отже, тепловіддача відбувається під час вимушеного турбулентного руху рідини в трубі, тому число Нуссельта визначаємо за

формулою  $Nu_{dp} = 0,021 Re_{dp}^{0,8} Pr_p^{0,43} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25} \varepsilon_l$ . Для газів число Прандтля не

залежить суттєво від температури і тому  $\frac{Pr_p}{Pr_m} = 1$ . Згідно з даними таблиць

поправочний коефіцієнт  $\varepsilon_l$  при  $l/d = 30$  і  $Re_{dp} = 25610$  дорівнює  $\varepsilon_l = 1,03$ . Підставляючи дані отримуємо, що число Нуссельта дорівнює  $Nu_{dp} = 0,021 \cdot 25610^{0,8} \cdot 0,67^{0,43} \cdot 1,03$  або  $Nu_{dp} = 61,2345$ . Коефіцієнт тепловіддачі між стінкою циліндричного каналу та димовими газами дорівнює  $\alpha = \frac{\lambda_p Nu_{dp}}{d}$ .

тому  $\alpha = \frac{0,04 \cdot 61,2345}{0,2}$ ,  $\alpha = 12,2 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$ .

Задача 5. Температура повітря  $t_p = 30^0 С$  і температура поверхні стіни  $t_m = 24^0 С$ . Визначити коефіцієнт тепловіддачі між повітрям і стіною, якщо висота стіни  $l = 6,2 м$ .

Фізичні параметри повітря при температурі  $t_p = 30^0 С$  такі:

$$\lambda = 2,67 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot К}, \nu_p = 16,01 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{с}, Pr_p = 0,701.$$

Визначаємо число Грасгофа  $Gr_{lp} = \frac{g \beta \Delta t l^3}{\nu_p^2}$ , де  $\Delta t = t_p - t_m$  і  $\beta = \frac{1}{273 + 30}$  (коефіцієнт об'ємного розширення для газів). Підставляючи дані отримуємо,

$$\text{що } Gr_{lp} = \frac{9,81 \cdot \frac{1}{303} \cdot (30 - 24) \cdot 6,2^3}{(16,01 \cdot 10^{-6})^2} = 180,622 \cdot 10^9$$

Оскільки  $Gr_{lp} Pr_p = 180,622 \cdot 10^9 \cdot 0,701 = 12,66 \cdot 10^{10}$ , тобто  $Gr_{lp} Pr_p > 6 \cdot 10^{10}$ , то число Нуссельта обчислюємо по формулі

$Nu_{lp} = 0,15 (Gr_{lp} Pr_p)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25}$ . Для газів число Прандтля не залежить суттєво від температури і тому  $\frac{Pr_p}{Pr_m} = 1$ . Підставляючи дані отримуємо, що число

Нуссельта дорівнює  $Nu_{lp} = 0,15 \cdot (180,622 \cdot 10^9 \cdot 0,701)^{\frac{1}{3}}$  або  $Nu_{lp} = 753,22$ .

Коефіцієнт тепловіддачі між поверхнею стіни і повітрям дорівнює  $\alpha = \frac{\lambda_p Nu_{lp}}{l}$ ,

$$\text{тому } \alpha = \frac{2,67 \cdot 10^{-2} \cdot 753,22}{6,2}, \alpha = 3,24 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}.$$

Задача 6. В трубі прямокутного перерізу розмірами  $0,2 \times 0,3 \times 0,2 \times 0,3 м$  та довжиною 3 метри тече повітря з середньою швидкістю  $w = 3 м/с$ . Середня температура повітря по довжині труби  $t_p = 50^0 С$ . Визначити коефіцієнт тепловіддачі між повітрям і стінкою прямокутного каналу.

Фізичні параметри повітря при температурі  $t_p = 50^0 С$  такі:

$$\lambda = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \nu = 17,96 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad Pr = 0,698.$$

Визначаємо еквівалентний діаметр поперечного перерізу за формулою  $d_{ef} = \frac{4F}{P}$ , де:  $F$  – площа поперечного перерізу січення;  $P$  – периметр поперечного січення. Підставляючи дані отримаємо

$$d_{ef} = \frac{4 \cdot 0,2 \cdot 0,3}{0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,3} = 0,24 \text{ м.}$$

Визначаємо число Рейнольдса за формулою

$$Re_{dp} = \frac{wd}{\nu_p}, \quad \text{тоді} \quad Re_{dp} = \frac{3 \cdot 0,24}{17,96 \cdot 10^{-6}} = 40089.$$

Оскільки число Рейнольдса

$Re_{dp} > 10000$ , то рух повітря всередині прямокутного каналу турбулентний. Отже, тепловіддача відбувається під час вимушеного турбулентного руху рідини в трубі, тому число Нуссельта визначаємо за формулою

$$Nu_{dp} = 0,021 Re_{dp}^{0,8} Pr_p^{0,43} \left( \frac{Pr_p}{Pr_m} \right)^{0,25} \varepsilon_l.$$

Для газів число Прандтля не залежить

суттєво від температури і тому  $\frac{Pr_p}{Pr_m} = 1$ . Поправочний коефіцієнт  $\varepsilon_l$

визначається з таблиць. Оскільки  $\frac{l}{d} = \frac{3}{0,24} = 12,5$  і  $Re_{dp} = 40089$ , то  $\varepsilon_l = 1,1$ .

Підставляючи дані отримаємо, що число Нуссельта дорівнює  $Nu_{dp} = 0,021 \cdot 40089^{0,8} \cdot 0,698^{0,43} \cdot 1,1$  або  $Nu_{dp} = 95,26$ . Коефіцієнт тепловіддачі

між стінкою прямокутного каналу та повітрям дорівнює  $\alpha = \frac{\lambda_p Nu_{dp}}{d}$ , тому

$$\alpha = \frac{2,82 \cdot 10^{-2} \cdot 95,26}{0,24}, \quad \alpha = 11,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

## Тема 6. Променевий теплообмін

Передача тепла відбувається теплопровідністю, конвекційним теплообміном та променевим теплообміном. **Променевий теплообмін** – складний процес передачі теплоти, який характеризується перетворенням внутрішньої енергії речовини в енергію електромагнітних хвиль, розповсюдженням хвиль та поглинанням їх речовиною, що приводить до зростання внутрішньої енергії тіла. Носіями променевої енергії є електромагнітні хвилі, які характеризуються довжиною хвилі  $\lambda$  і поширюються у вакуумі з швидкістю  $c_0 = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . В залежності від довжини хвилі випромінювання поділяються:

$\gamma$  – випромінювання ( $5 \cdot 10^{-11} \text{ мм} \leq \lambda \leq 10^{-9} \text{ мм}$ );  
 рентгенівське ( $10^{-9} \text{ мм} \leq \lambda \leq 2 \cdot 10^{-5} \text{ мм}$ ); ультрафіолетове ( $2 \cdot 10^{-5} \text{ мм} \leq \lambda \leq 4 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ );  
 світлове (видиме) ( $4 \cdot 10^{-4} \text{ мм} \leq \lambda \leq 8 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ );



інфрачервоне (теплове) ( $8 \cdot 10^{-4} \text{ мм} \leq \lambda \leq 0,8 \text{ мм}$ ) та радіохвилі ( $0,2 \text{ мм} \leq \lambda$ ). Теплове випромінювання – випромінювання, якщо електромагнітні хвилі мають довжину в діапазоні ( $4 \cdot 10^{-4} \text{ мм} \leq \lambda \leq 2 \cdot 10^{-1} \text{ мм}$ ). Закони розповсюдження, заломлення і відбиття, які встановлені в оптиці для світлових променів, справедливі також для теплових променів. Теплове випромінювання є властивістю всіх тіл. Кількість випроміненої тілом енергії залежить від фізичних властивостей тіла та його температури. Залежно від спектра, випромінювання поділяють на неперервне та селективне (вибіркове). Більшість твердих тіл та рідин мають неперервний спектр випромінювання. Вони випромінюють хвилі всіх довжин, від малих до великих. Гази мають селективний спектр випромінювання. Їх випромінювання характеризується певним діапазоном довжини хвиль.

**Потоком випромінювання**  $Q$  – називають променеву енергію, яка проходить через довільну поверхню за одиницю часу,  $[Q] = \text{Вт}$ . Потік теплового випромінювання, що виходить з одиниці площі за всіма напрямками напівсферичного простору, називають **поверхневою густиною потоку випромінювання**  $E$ ,  $[E] = \text{Вт}/\text{м}^2$ . Вона описується формулою  $E = \frac{dQ}{dF}$ , де  $dQ$  – величина променевого потоку,  $dF$  – величина площі поверхні з якої випромінюється променева енергія. Променевий потік, який виходить з усієї поверхні дорівнює  $Q = \int_F E dF$ . Розподіл променевої енергії за довжинами хвиль випромінювання характеризується спектральною інтенсивністю випромінювання  $E_\lambda$ , яка визначається за формулою  $E_\lambda = \frac{dE(\lambda)}{d\lambda}$ , де  $E(\lambda)$  – спектральна густина теплового випромінювання.

При попаданні теплових променів на тіло частина їх поглинається, частина – відбивається і частина теплових променів проходить крізь тіло. Та частина енергії, яка поглинається, перетворюється в теплову. Для всякого тіла, яке отримує променеву енергію, дійсне рівняння теплового балансу

$$Q_{nad} = Q_A + Q_R + Q_D, \quad (113)$$

де  $Q_{nad}$  – кількість теплової енергії, яка опромінила тіло;  $Q_A$  – кількість променевої енергії яку поглинуло тіло;  $Q_R$  – кількість променевої енергії яка відбилась від тіла;  $Q_D$  – кількість променевої енергії яка пройшла крізь тіло. Поділивши всі члени рівняння (113) на  $Q_{nad}$  отримаємо, що

$$A + R + D = 1, \quad (114)$$

де  $A, R, D$  відповідно коефіцієнти поглинальної, відбивної і пропускнуї здатності тіла.

**Абсолютно чорним** тілом називають тіло яке повністю поглинає променеву енергію, що потрапляє на нього, тобто тіло для якого  $A = 1, R = 0, D = 0$ .

**Дзеркальним** тілом називають тіло яке повністю, згідно з законами геометричної оптики, відбиває всю променеву енергію яка падає на нього, тобто тіло для якого  $A = 0, R = 1, D = 0$ . Для дзеркальних поверхонь відбитий

промінь залишається в площині падіння і кути падіння та відбиття рівні між собою.

**Абсолютно білим** тілом називають тіло, яке здійснює повне дифузійне відбиття променевої енергії яка падає на нього, тобто тіло для якого  $A=0, R=1, D=0$ . В дифузійному відбитті падаючий промінь після відбиття розпадається на безліч променів.

**Абсолютно прозорим** тілом ( **діатермічним**) називають тіло яке повністю пропускає променеву енергію, яка падає на нього, тобто тіло для якого  $A=0, R=0, D=1$ .

В природі абсолютно чорних, білих та прозорих тіл не буває. Більшість твердих тіл, практично, через себе променевої енергії не пропускають, тобто  $D=0$ . Велику поглинальну здатність мають *наприклад*: нафтова сажа (чорного кольору), сніг (білого кольору), оксамит ( довірльних кольорів) для яких  $A=0,97$ . Поглинальній здатності тіла сприяє нерівність його поверхні. Відполіровані метали мають велику відбивну здатність променевої енергії, для них  $R=0,97$ . Одноатомні та двоатомні гази практично є діатермічними. Сонячну енергію повітря пропускає без його поглинання. Існують тіла, які прозорі тільки для променів певної довжини, *наприклад* віконне скло, яке пропускає світлові промені але поглинає ультрафіолетові та інфрачервоні.

Випромінювання з елементарної площі  $dF$  поверхні тіла може бути нерівномірним за різними напрямками в просторі. Кількість променевої енергії випроміненої з одиниці площі  $dF$  поверхні тіла за одиницю часу в одиниці елементарного просторового кута  $d\Omega$ , побудованого біля заданого напрямку  $\vec{l}$ , який утворює кут  $\varphi$  з нормаллю  $\vec{n}$  до площадки  $dF$ , характеризується кутовою густиною випромінення  $E_\varphi$ ,

де

$$E_\varphi = \frac{d^2 Q_\varphi}{dF d\Omega}. \quad (115)$$

Отже, поверхнева густина потоку випромінення дорівнює  $E = \int_{2\pi} E_\varphi d\Omega$ .

Величину  $\frac{E_\varphi}{\cos \varphi}$  називають **яскравістю випромінення**. Якщо яскравість у всіх напрямках однакова, то таке **випромінення** називають **дифузійним**. Для

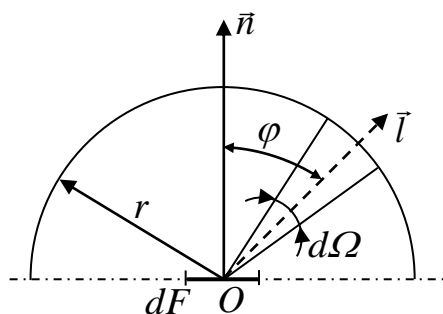


Рис. 10. .Кутова густина випромінення

дифузійного випромінення поверхнева густина потоку випромінювання дорівнює  $E = \pi E_n$ , де  $E_n$  кутова густина випромінення в напрямку нормалі до поверхні.

### Закони випромінювання абсолютно чорного тіла

**Формула Планка.** Ця формула встановлює залежність спектральної інтенсивності випромінення абсолютно чорного тіла  $E_{\lambda 0}$  від довжини хвилі  $\lambda$  і температури  $T$ . Індекс «0», тут і надалі в цій темі, вказуватиме, що характеристики відносяться до абсолютно чорного тіла.

Аналітична залежність спектральної інтенсивності випромінення від довжини хвилі і температури була отримана Планком на основі квантової теорії і має вигляд:

$$E_{\lambda 0}(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} \left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}, \quad (116)$$

де  $c_1 = 0,374 \cdot 10^{-15} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$ ,  $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$ ,  $\lambda$  – довжина хвилі  $[\lambda] = \text{м}$ ,  $T$  – абсолютна температура. Випромінення абсолютно чорного тіла характеризується неперервним спектром з діапазоном хвиль від  $\lambda = 0$  до  $\lambda = \infty$ .

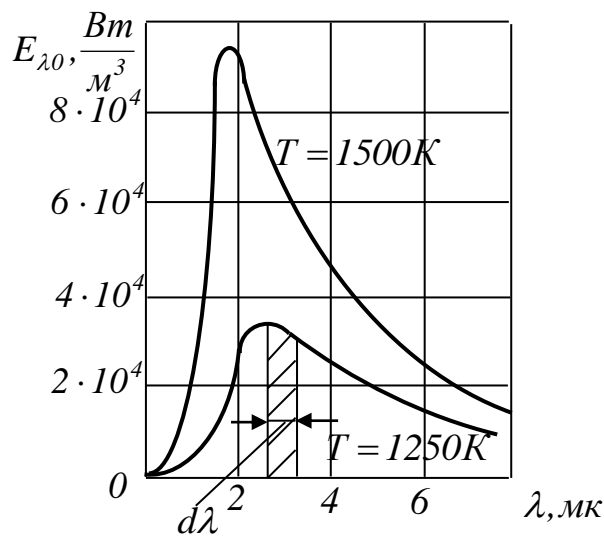


Рис. 11. Залежність спектральної інтенсивності випромінювання абсолютно чорного тіла від довжини хвилі і температури

Криві спектральної інтенсивності випромінення характеризуються наявністю максимуму з різким спадом в сторону коротких хвиль і більш повільного спаду в сторону довгих хвиль. Площа елементарної площадки обмеженої зверху кривою спектральної інтенсивності випромінення (рис. 11), для даної температури, а знизу – шириною  $d\lambda$ , характеризує величину променевого випромінення з довжиною хвилі  $\lambda$ . З графіків (рис. 11) можна стверджувати, якщо  $T < 1000 \text{ К}$ , то майже вся променева енергія переноситься інфрачервоними променями ( $8 \cdot 10^{-4} \text{ мм} \leq \lambda \leq 0,8 \text{ мм}$ ). Із збільшенням температури зростає частка променевої енергії яку переносить світлове випромінення ( $4 \cdot 10^{-4} \text{ мм} \leq \lambda \leq 8 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ ). Величина поверхневої густини

випромінення  $E$  чисельно дорівнює площі фігури розміщеної нижче спектральної кривої та вище осі абсцис.

**Закон Віна.** Він встановлює залежність положення максимуму спектральної інтенсивності випромінення від абсолютної температури та вказує, що максимальна величина променевого випромінення абсолютно чорного тіла буде для довжини хвилі яка визначається за формулою

$$\lambda_{max} = \frac{2,896 \cdot 10^{-3}}{T} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (117)$$

Для реальних тіл залежність густини випромінювання  $E(\lambda, T)$  від довжини хвиль та температури може бути встановлена на основі експериментального визначення їх спектра. Для реальних газів дана формула справедлива якщо  $T \leq 1000\text{К}$ .

**Закон Стефана-Больцмана.** Він встановлює залежність сумарного потоку випромінення абсолютно чорного тіла  $E_0$  від температури. Величина потоку може бути отримана з формули Планка шляхом її інтегрування, тобто

$$E_0(T) = \int_0^{\infty} E_{\lambda 0}(\lambda, T) d\lambda, \quad E_0(T) = \int_0^{\infty} c_1 \lambda^{-5} (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)^{-1} d\lambda$$

або 
$$E_0(T) = \sigma_0 T^4, \quad (118)$$

де  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$  коефіцієнт випромінення абсолютно чорного тіла.

Формула (118) виражає закон Стефана-Больцмана. Дана залежність вказує, що кількість променевої енергії випромінюваної абсолютно чорним тілом пропорційна четвертій степені абсолютної температури. В технічних розрахунках використовують формулу у вигляді

$$E_0 = 5,67 \left( \frac{T}{100} \right)^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (119)$$

Інтенсивність випромінення  $E(\lambda, T)$  всіх твердих, рідких і газоподібних тіл суттєво залежить від довжини хвилі випромінювання та температури. Вона завжди менша спектральної інтенсивності випромінення абсолютно чорного тіла  $E_0(\lambda, T)$  при тій же довжині хвилі та температурі. Деякі тіла випромінюють енергію лише в невеликих інтервалах довжин хвиль. Це явище особливо властиве газам. Для характеристики реальних тіл використовується **спектральний ступінь чорноти**  $\varepsilon(\lambda, T)$ , яка характеризує відношення спектральної інтенсивності випромінювання реального тіла до спектральної інтенсивності випромінювання абсолютно чорного тіла при тій же довжині

хвилі та температури, тобто  $\varepsilon(\lambda, T) = \frac{E(\lambda, T)}{E_0(\lambda, T)}$ . Для більшості реальних тіл

спектральний ступінь чорноти  $\varepsilon(\lambda, T)$  залежить від довжини хвилі і температури. В реальному житті дослідження променевого випромінювання і поглинання пов'язане з поняттям "сіре тіло". **Сірим тілом** називають таке тіло, спектр випромінення якого неперервний і повністю подібний до спектра випромінення абсолютно чорного тіла при тій же температурі, а спектральний

ступінь чорноти  $\varepsilon(\lambda, T)$  не залежить від величини довжини хвилі, тобто  $\varepsilon(T)$  є функцією тільки температури. Очевидно, величини спектрального та інтегрального ступенів чорноти для сірого тіла однакові і тому  $\varepsilon(\lambda, T) = \varepsilon(T)$ . Ступінь чорноти тіла  $\varepsilon(T)$  характеризує відношення енергії випромінювання тілом до енергії випромінювання абсолютно чорним тілом за тої ж температури, тобто  $\frac{E(T)}{E_0(T)} = \varepsilon(T)$ . Значення ступеня чорноти  $\varepsilon$  залежить від матеріалу, стану поверхні і температури поверхні тіла, що випромінює.

Для сірих тіл енергія випромінювання обчислюється за формулою

$$E(\lambda, T) = 5,67 \varepsilon \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (120)$$

**Закон Ламберта.** Цей закон характеризує розподіл енергії випромінювання абсолютно чорного тіла по напрямках. Закон Ламберта стверджує, що випромінювання абсолютно чорного тіла є дифузійним, тобто яскравість випромінювання у всіх напрямках однакова, тоді максимальне випромінювання одиниці площі поверхні тіла буде за напрямком нормалі до неї. Отже, якщо вузький пучок променів напрямлено під кутом  $\varphi$  до нормалі, то кількість випроміненої енергії дорівнює  $E_{0\varphi} = E_{0n} \cos \varphi = \frac{E_0}{\pi} \cos \varphi$ , де  $E_0 = 5,67 \left( \frac{T}{100} \right)^4$  – густина потоку випромінювання абсолютно чорного тіла з температурою  $T$ .

### **Закон Кірхгофа**

Різні тіла мають різні поверхневі густини випромінювання  $E$  та поглинальні властивості  $A$  при даній температурі. Залежність між цими величинами встановлює закон Кірхгофа. Розглянемо систему, яка складається з двох плоских безмежних паралельних стінок, які перебувають в тепловій рівновазі, тобто температури стінок рівні за величиною. Поверхня однієї стінки абсолютно чорна ( $A_0=1$ ), а поверхня другої стінки – сіра ( $\varepsilon < 1; A < 1$ ), де  $\varepsilon$  – ступінь чорноти тіла;  $A$  – коефіцієнт який характеризує поглинальну здатність сірого тіла. Кількість енергії, яку випромінює абсолютно чорна стінка з одиниці площі поверхні за одиницю часу, дорівнює  $E_0 = \sigma_0 T^4$ . Частина енергії  $AE_0$  поглинає сіра стінка, а частина енергії  $(1-A)E_0$  відбивається від сірої стінки і поглинається абсолютно чорним тілом. Сіре тіло випромінює енергію  $E$ , яку поглинає абсолютно чорне тіло. З умови теплової рівноваги отримуємо рівність  $E_0 = E + (1-A)E_0$ . Звідки отримуємо  $E = AE_0$  або  $\frac{E}{A} = E_0$ .

Отже, **закон Кірхгофа** стверджує: за термодинамічної рівноваги відношення густини потоку випромінювальної здатності сірого тіла до його поглинальної здатності не залежить від фізичних властивостей сірого тіла і для всіх тіл однаково та дорівнює густині потоку випромінювання абсолютно чорного тіла за такої самої температури, тобто

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \frac{E_3}{A_3} = \dots = \frac{E_0}{A_0} = E_0(T).$$

Оскільки  $E_i = \varepsilon_i E_0$ , то попередня залежність матиме вигляд

$$\frac{\varepsilon_1 E_0}{A_1} = \frac{\varepsilon_2 E_0}{A_2} = \frac{\varepsilon_3 E_0}{A_3} = \dots = \frac{E_0}{A_0} = E_0(T)$$

або

$$\frac{\varepsilon_1}{A_1} = \frac{\varepsilon_2}{A_2} = \frac{\varepsilon_3}{A_3} = \dots = \frac{1}{A_0} = 1.$$

Отже, за термодинамічної рівноваги коефіцієнт поглинання та ступінь чорноти сірого тіла чисельно збігаються, тобто  $\varepsilon_i = A_i$ . Ця рівність дозволяє стверджувати, що випромінювальна здатність сірого тіла тим більша чим більша його поглинальна здатність. Випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла за будь-якої температури є максимальною і більшою від випромінювальної здатності сірого тіла.

### ***Теплообмін випромінюванням між плоскими паралельними стінками відокремленими діатермічним середовищем***

Розглянемо дві паралельні плоскі сірі стінки безмежної протяжності, які мають різну температуру і відокремлені діатермічним середовищем. Перша стінка з температурою  $T_1$  має власну густину потоку випромінювання  $E_1$  і поглинальну здатність  $A_1$ . Друга стінка з температурою  $T_2$  характеризується густиною потоку випромінювання  $E_2$  та поглинальною здатністю  $A_2$ . Вважаємо, що  $T_1 > T_2$ . Отже, стінки будуть обмінюватись променевою енергією, в результаті чого встановиться стаціонарний променевий тепловий потік скерований від більш гарячої стінки до менш гарячої. Якщо на тверде тіло не падає тепловий промінь, то з одиниці площі поверхні тіла випромінюється променевий потік  $E$ . Це власне випромінювання тіла. Однак на тіло падає випромінювання і  $E_{nad}$  – величина променевої енергії яка падає на тіло.  $A E_{nad}$  – величина падаючої енергії, яка поглинається тілом.  $(1 - A) E_{nad}$  – величина променевої енергії, яку тверде тіло не поглинуло а відбило.  $E_{ef} = E + (1 - A) E_{nad}$  – величина променевої енергії яка фактично відходить від твердого тіла (тут враховується як особисте випромінювання так і відбита променева енергія). Ефективне випромінювання залежить від фізичних властивостей тіла, його температури, форми тіла, його розмірів та теплофізичної поведінки навколишніх твердих тіл. Ефективне випромінювання  $E_{ef}$  відчувається людиною та фіксується приладами.

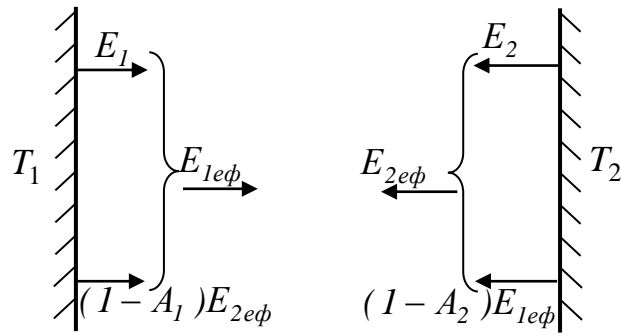


Рис. 12. Схема променевого теплообміну між двома сірими плоскими паралельними поверхнями

Отже, сумарне випромінювання від першої стінки складається з власного випромінювання  $E_1$  і випромінювання внаслідок відбиття променевого потоку від другої стінки  $(1 - A_1)E_{2ef}$ , тобто ефективне випромінення першого тіла дорівнює

$$E_{1ef} = E_1 + (1 - A_1)E_{2ef}. \quad (121)$$

Друга стінка випромінює тепловий потік  $E_2$ , та відбиває величину теплового потоку  $(1 - A_2)E_{1ef}$  від випромінювання першої стінки. Отже, сумарне випромінювання від другої стінки, тобто ефективне випромінення другого тіла дорівнює

$$E_{2ef} = E_2 + (1 - A_2)E_{1ef}. \quad (122)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (121), (122) отримаємо  $E_{1ef} = \frac{E_1 + (1 - A_1)E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}$

та  $E_{2ef} = \frac{E_2 + (1 - A_2)E_1}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}$ . Результуюче випромінення дорівнює різниці між

ефективним випроміненням, яке йде від першого тіла до другого, тобто густина теплового потоку від першої стінки до другої дорівнює різниці густин ефективного випромінення

$$q_{1,2} = E_{1ef} - E_{2ef} = \frac{E_1 A_2 - E_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (123)$$

Для сірого тіла густина випромінювання дорівнює  $E_i = 5,67 \varepsilon_i \left( \frac{T_i}{100} \right)^4$ .

Враховуючи, що поглинальна здатність тіла дорівнює ступеневі чорноти, тобто  $A_i = \varepsilon_i$ , співвідношення (123) набере вигляду

$$q_{1,2} = \frac{5,67 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right)$$

або

$$q_{1,2} = \frac{5,67}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (124)$$

Величину  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$  називають узагальненим ступенем чорноти системи

тіл 1 і 2. Отже, густину теплового потоку випромінювання між плоскими безмежними паралельними стінками відокремленими діатермічним середовищем визначають за формулою:

$$q_{1,2} = 5,67 \varepsilon_{1,2} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (125)$$

### ***Теплообмін випромінюванням між твердими тілами, одне з яких розміщене всередині іншого***

Розглядаємо стаціонарний теплообмін між твердим тілом 1 з випуклою поверхнею площею  $F_1$ , яке розміщене всередині другого тіла 2, площа поверхні якого  $F_2$ . Нехай температура на поверхні першого тіла  $T_1$  і його ступінь чорноти  $\varepsilon_1$ .  $T_2$  – температура внутрішньої поверхні тіла 2 і ступінь його чорноти  $\varepsilon_2$ . Середовище, яке заповнює простір між першим та другим тілами, вважається

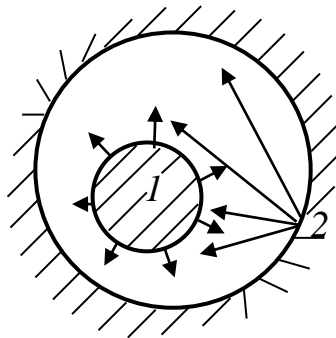


Рис. 13. Схема променевого теплообміну між тілом 1 і внутрішньою поверхнею тіла 2

діатермічним. Внаслідок випуклості поверхні першого тіла, всі його промені попадають на поверхню другого тіла. Промені з другого тіла частково попадають на поверхню першого тіла а частково, минаючи перше тіло, попадають на іншу частину поверхні другого тіла. Величина теплового потоку від першого тіла до другого внаслідок променевого теплообміну визначається за формулою:

$$Q = 5,67 \varepsilon_{1,2} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) F_1, \quad (126)$$

де  $\varepsilon_{1,2}$  – узагальнений ступінь чорноти системи тіл, яка визначається за формулою:



$$\varepsilon_{1,2} = \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right)^{-1}. \quad (127)$$

Для випадку, якщо площа поверхні першого тіла значно менша від площі внутрішньої поверхні другого тіла, формула (126) набирає вигляду:

$$Q = 5,67 \varepsilon_1 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) F_1. \quad (128)$$

Формули (126) та (128) справедливі для випадку, якщо обидві поверхні мають сферичну форму. Ці формули з достатньою точністю описують променевий теплообмін, якщо одне циліндричне тіло розміщене всередині другого і нагрітим тілом є внутрішній циліндр.

### Теплові екрани

Для захисту від теплового опромінювання та зменшення теплопередачі випромінюванням використовуються теплові екрани. **Теплові екрани** – це технічні прилади, які розміщуються між поверхнями, одна з яких випромінює, а друга – поглинає тепловий потік. Екрани поділяються на відбиваючі та поглинаючі. За реалізацією **відбиваючий екран** – тонка стінка, непроникна для електромагнітного опромінювання ( $D=0$ ), з малим термічним опором. В такому випадку температуру по товщині відбиваючого екрану можна вважати сталою. *Прикладами* таких екранів служать тонкі металеві пластини, які застосовуються для захисту будівельних конструкцій, людей і пожежної техніки від опромінювання полум'ям під час гасіння пожежі. **Поглинаючі екрани** – технічні споруди, які поглинають променеву енергію. *Приклади* – протипожежні стіни, перекриття, облицювання, водяні завіси та інше.

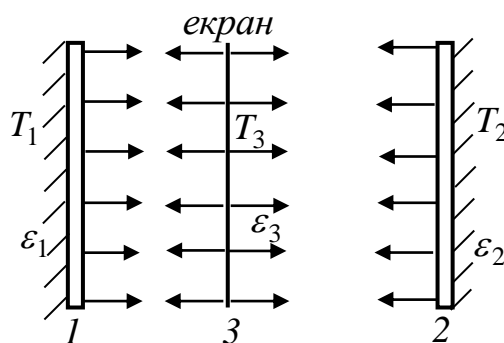


Рис. 14. Схема променевого теплообміну між плоскпаралельними тілами відокремленими тепловим екраном

Розглянемо променевий теплообмін між плоскпаралельними поверхнями відокремленими тепловим екраном. Вважаємо, що  $T_1, T_2, T_3$  – температури,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – ступені чорноти відповідно плоских поверхонь тіл 1, 2 і відбиваючого екрана 3.

Густина променевого теплового потоку від першого тіла до теплового екрана і від теплового екрана до другого тіла, тобто від першого тіла до другого, за наявності теплового екрана, визначається такою формулою:

$$q_{1,2}^e = \frac{\varepsilon_{1,3}\varepsilon_{3,2}}{\varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{3,2}} 5,67 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right), \quad (129)$$

$$\text{де: } \varepsilon_{1,3} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1}, \quad \varepsilon_{3,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1}.$$

Величина температури на поверхні теплового екрана визначається за

$$\text{формулою} \quad T_3 = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{1,3}T_1^4 + \varepsilon_{3,2}T_2^4}{\varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{3,2}}}. \quad (130)$$

Величина температури на поверхні теплового екрана не може бути довільною, оскільки кожний матеріал має межу допустимої температури. Гранично допустима температура для одинарного листа білої бляхи  $T_{3, \text{don}} \leq 923K$ ; для окислених алюмінієвих листів  $T_{3, \text{don}} \leq 823K$ ; для азбестового картону і полірованих алюмінієвих листів  $T_{3, \text{don}} \leq 873K$ .

Для випадку, якщо ступені чорноти плоскопаралельних тіл і теплового екрана однакові, то густина променевого теплового потоку між поверхнями першого і другого тіл зменшується вдвоє в порівнянні з променевим тепловим потоком за відсутності теплового екрана, тобто  $q_{1,2}^e = 0,5q_{1,2}$ .

Для випадку якщо поверхні теплового екрана добре відбивають теплове випромінювання, тобто  $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_3$  і  $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_3$  рівняння (129) набирає вигляду

$$q_{1,2}^e = \frac{\varepsilon_3}{2} 5,67 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (131)$$

Якщо тепловий екран складається з  $n$  шарів і ступінь чорноти всіх шарів однаковий, то

$$q_{1,2}^e = \left( 1 + \varepsilon_{1,2}n \left( \frac{2}{\varepsilon_3} - 1 \right) \right)^{-1} \varepsilon_{1,2} 5,67 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right), \quad (132)$$

$$\text{або} \quad q_{1,2}^e = \left( 1 + \varepsilon_{1,2}n \left( \frac{2}{\varepsilon_3} - 1 \right) \right)^{-1} q_{1,2}, \quad (133)$$

$$\text{де } \varepsilon_{1,2} = \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)^{-1}.$$

Ефект послаблення результуючого теплового потоку під час променевого теплообміну є значним, якщо ступінь чорноти поверхні теплового екрана незначний.

### Методика розв'язування задач

**Задача 1.** Визначити густина променевих теплових потоків між двома плоскими паралельними стінками відокремленими діатермічним середовищем, для двох випадків Перша стінка виготовлена з червоної цегли і її температура  $t_1 = 827^{\circ}C$  та ступінь чорноти  $\varepsilon_1 = 0,93$ . Друга стінка в першому випадку

виготовлена з дерева а в другому випадку – з листової сталі. Температура другої стінки  $t_2 = 27^{\circ}C$ . Ступінь чорноти дерева  $\varepsilon_2 = 0,9$  а листової сталі –  $\varepsilon_2 = 0,56$ .

Густину променевого теплового потоку від поверхні більш нагрітої стінки до стінки з менш нагрітою поверхнею визначаємо за формулою

$$q_{1,2} = 5,67\varepsilon_{1,2} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right),$$

де узагальнений ступінь чорноти системи тіл 1, 2 дорівнює  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ .

I випадок. Система тіл: червона цегла і дерево. Підставляючи значення величин отримаємо, що узагальнений ступінь чорноти для цієї системи тіл

дорівнює  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{0,93} + \frac{1}{0,9} - 1}$  або  $\varepsilon_{1,2} = 0,843$ . Отже, густина променевого

теплового потоку від більш нагрітої стінки до менш нагрітої дорівнює

$$q_{1,2} = 5,67 \cdot 0,843 \left( \left( \frac{1100}{100} \right)^4 - \left( \frac{300}{100} \right)^4 \right), q_{1,2} = 69586 \frac{Вт}{м^2}.$$

II випадок. Система тіл: червона цегла і листовая сталь. Узагальнений ступінь чорноти для цієї системи тіл дорівнює  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{0,93} + \frac{1}{0,56} - 1}$  або

$\varepsilon_{1,2} = 0,537$ . Отже, густина променевого теплового потоку від більш нагрітої

стінки до менш нагрітої дорівнює  $q_{1,2} = 5,67 \cdot 0,537 \left( \left( \frac{1100}{100} \right)^4 - \left( \frac{300}{100} \right)^4 \right)$ ,

$$q_{1,2} = 44361 \frac{Вт}{м^2}.$$

**Висновок.** Густина променевого теплового потоку до тіла з меншим ступенем чорноти є менша від густини променевого теплового потоку до тіла з більш високим ступенем чорноти.

**Задача 2.** Всередині сфери радіуса  $R_2 = 2,4 м$  розміщена куля радіусом  $R_1 = 0,2 м$ . Визначити величину променевого теплового потоку, якщо температура поверхонь тіл дорівнює  $t_1 = 820^{\circ}C$  і  $t_2 = 24^{\circ}C$ , а їх ступені чорноти  $\varepsilon_1 = 0,92$  і  $\varepsilon_2 = 0,24$ .

Площа поверхні кулі  $F_1 = 4\pi R_1^2$ ,  $F_1 = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,2^2$  або  $F_1 = 0,503 м^2$ . Площа сферичної поверхні  $F_2 = 4\pi R_2^2$  або  $F_2 = 72,38 м^2$ . Узагальнений ступінь

чорноти системи тіл 1, 2 визначаємо за формулою  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$ .

Підставляючи значення величин отримаємо  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{0,92} + \frac{0,503}{72,38} \left( \frac{1}{0,24} - 1 \right)}$  або

$\varepsilon_{1,2} = 0,902$ . Величину променевого теплового потоку від тіла, яке розміщене всередині другого, визначаємо за формулою

$$Q_{1,2} = \varepsilon_{1,2} \cdot 5,67 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) F_1. \quad \text{Підставляючи дані отримаємо}$$

$$Q_{1,2} = 0,902 \cdot 5,67 \left( \left( \frac{1093}{100} \right)^4 - \left( \frac{297}{100} \right)^4 \right) 0,503 \text{ або } Q_{1,2} = 36479 \text{ Вт}.$$

Задача 3. Визначити вплив теплового екрана на густину променевого теплового потоку між двома плоскопаралельними поверхнями, якщо температура на поверхні стінки з шамотної цеглі  $t_1 = 938^\circ \text{C}$  і її ступінь чорноти  $\varepsilon_1 = 0,6$ . Друга стінка виготовлена з дерева, температура на його поверхні  $t_2 = 60^\circ \text{C}$  і  $\varepsilon_1 = 0,8$ . Тепловий екран виготовлений з полірованого алюмінію ступінь чорноти якого  $\varepsilon_3 = 0,07$ .

Густина променевого теплового потоку між двома плоскопаралельними стінками без теплового екрана визначається за формулою

$$q_{1,2} = 5,67 \varepsilon_{1,2} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right), \text{ де узагальнений ступінь чорноти системи тіл}$$

1, 2 дорівнює  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ . Підставляючи дані отримаємо

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{0,6} + \frac{1}{0,8} - 1}, \quad \varepsilon_{1,2} = 0,522 \quad \text{і} \quad q_{1,2} = 5,67 \cdot 0,522 \left( \left( \frac{1211}{100} \right)^4 - \left( \frac{333}{100} \right)^4 \right),$$

$$q_{1,2} = 63259 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Густину теплового потоку від першого тіла до другого, за наявності теплового екрана, визначаємо використовуючи формулу:

$$q_{1,2}^e = \frac{\varepsilon_{1,3} \varepsilon_{3,2}}{\varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{3,2}} 5,67 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right), \text{ де: } \varepsilon_{1,3} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \quad \text{і} \quad \varepsilon_{3,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$

Ступені чорноти відповідних систем тіл дорівнюють  $\varepsilon_{1,3} = \frac{1}{\frac{1}{0,6} + \frac{1}{0,07} - 1}$  і

$\varepsilon_{1,3} = 0,0669$ ,  $\varepsilon_{3,2} = \frac{1}{\frac{1}{0,07} + \frac{1}{0,8} - 1}$  і  $\varepsilon_{3,2} = 0,0688$ . Отже, густина теплового

потoku за наявності теплового екрана дорівнює

$$q_{1,2}^e = \frac{0,0669 \cdot 0,0688}{0,0669 + 0,0688} 5,67 \left( \left( \frac{1211}{100} \right)^4 - \left( \frac{333}{100} \right)^4 \right) \text{ або } q_{1,2}^e = 4111,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

теплового екрана зменшує променевий тепловий потік у  $\frac{63259}{4111,7} = 15$  разів.

Задача 4. Визначити кількість шарів в теплому екрані виготовленого з сталльної блискучої оцинкованої бляхи, якщо плоска стінка, виготовлена з шамотної цегли, нагрілась до температури  $t_1 = 1100^\circ \text{C}$ . Друга стінка виготовлена з дерева і температура її поверхні  $t_2 = 67^\circ \text{C}$ . Допустима густина променевого теплового потоку для дерева  $q_{\text{дон}} = 12800 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . Ступені чорноти для шамотної цегли  $\varepsilon_1 = 0,75$ , для дерева –  $\varepsilon_2 = 0,8$  і для листової блискучої оцинкованої сталі  $\varepsilon_3 = 0,28$ .

Коефіцієнт чорноти системи тіл 1, 2 дорівнює  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{0,75} + \frac{1}{0,8} - 1}$ ,

$\varepsilon_{1,2} = 0,632$ . Густина теплового променевого потоку між двома стінками без

теплового екрана дорівнює  $q_{1,2} = 5,67 \cdot 0,632 \left( \left( \frac{1373}{100} \right)^4 - \left( \frac{340}{100} \right)^4 \right)$ ,

$q_{1,2} = 126782 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . За наявності  $n$  шарів в теплому екрані, густина променевого теплового потоку визначається за формулою

$$q_{1,2}^e = \frac{q_{1,2}}{1 + \varepsilon_{1,2} n \left( \frac{2}{\varepsilon_3} - 1 \right)}.$$

З цього рівняння отримаємо, що  $n = \frac{q_{1,2} - q_{1,2}^e}{\varepsilon_{1,2} \left( \frac{2}{\varepsilon_3} - 1 \right) q_{1,2}^e}$ .

Підставляючи значення величин і враховуючи, що в граничному режимі

$$q_{1,2}^e = q_{\text{дон}}, \text{ отримаємо } n = \frac{126782 - 12800}{0,632 \left( \frac{2}{0,28} - 1 \right) 12800} \text{ і } n = 2,29.$$

Отже, необхідно зробити тепловий екран з 3 шарів сталльної блискучої оцинкованої бляхи.

Задача 5. Визначити працездатність теплового екрана з полірованого алюмінію встановленого між стінкою печі, яка виготовлена з шамотної цегли, та стінкою з дерева. Температура поверхні печі  $t_{m0} = 800^\circ \text{C}$  і поверхні другої стінки –  $t_{m1} = 70^\circ \text{C}$ . Гранично допустима температура для цього теплового

екрана  $t_{m3} \leq 600^{\circ}C$ . Ступінь чорноти шамотної цегли  $\varepsilon_1 = 0,6$ , дерев'яної стінки –  $\varepsilon_2 = 0,9$  і полірованого алюмінію –  $\varepsilon_3 = 0,08$ .

Узагальнені ступені чорноти системи тіл дорівнюють  $\varepsilon_{1,3} = \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)^{-1}$  і  $\varepsilon_{3,2} = \left( \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)^{-1}$ . Підставляючи значення величин отримаємо, що  $\varepsilon_{1,3} = \left( \frac{1}{0,6} + \frac{1}{0,08} - 1 \right)^{-1} = 0,076$  і  $\varepsilon_{3,2} = \left( \frac{1}{0,08} + \frac{1}{0,9} - 1 \right)^{-1} = 0,077$ .

Температуру на поверхні теплового екрана визначаємо за формулою  $T_3 = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{1,3}T_1^4 + \varepsilon_{3,2}T_2^4}{\varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{3,2}}}$ . Підставляючи значення величин отримаємо, що  $T_3 = \sqrt[4]{\frac{0,076 \cdot 1073^4 + 0,077 \cdot 343^4}{0,076 + 0,077}} = 902K$  або  $t_3 = 629^{\circ}C$ .

Отже враховуючи, що для полірованого алюмінію допустима температура  $t_{m3} \leq 600^{\circ}C$ , а, згідно з розрахунками температура на поверхні теплового екрана досягатиме  $t_3 = 629^{\circ}C$  можна стверджувати про втрату працездатності теплового екрану.

## Тема 7. Види палива. Головні стадії горіння. Основні положення

**Паливом** називають вуглецеві, водневі, сірчисті та інші сполуки, які під час згорання виділяють велику кількість теплоти. За агрегатним станом паливо поділяють на тверде, рідке та газоподібне, а за способом отримання – на природне та штучне. **Природне паливо** – паливо отримане з навколишнього середовища без суттєвої технічної переробки. До природного твердого палива відносяться *наприклад*: дрова, торф, буре і камінне вугілля, антрацит, горючі сланці. До природного рідкого палива відноситься *наприклад*: сира нафта, а до газоподібного – природний горючий газ.

Газоподібне паливо – механічна суміш горючих та негорючих газів. До горючих газів відноситься водень, окис вуглецю, метан, різні вуглеводи та сірководень. Окрім цих головних складових в газоподібному паливі містяться водяна пара, азот, вуглекислий газ, рідини в крапельному та тверді тіла в порошковидному стані. Головним компонентом природного газу є метан, частка якого становить 80 – 98%.

Природне рідке паливо – нафта до складу якого входить  $C^p = 83 - 87\%$ ,  $H^p = 11 - 14\%$ ,  $S^p = 0,01 - 7\%$ ,  $O^p = 0,1 - 0,3\%$ ,  $N^p = 0,02 - 1,7\%$ .

Цінність твердого палива як горючої речовини визначається його хімічним складом та структурою палива. Недоліками твердого палива є вміст води та негорючих домішок.

**Штучне паливо** отримують з природного палива шляхом технічної переробки останнього. До штучного твердого палива відноситься *наприклад*: деревинне вугілля, кокс, торф'яні та вугільні брикети. Штучним рідким паливом *наприклад*: є продукти переробки нафти – мазут, гас, бензин, олива та інші, в тому числі біопаливо. Штучним газоподібним паливом *наприклад*: є газ отриманий від переробки гною, відходів харчування та інших відходів.

За своїм складом паливо є складною хімічною речовиною, яка складається як з горючих, так і не горючих речовин. До горючих елементів твердого, рідкого і газоподібного палива відноситься вуглець, водень і летюча сірка. До не горючих елементів відносяться азот, кисень, сульфатна сірка, волога і зола. Сірка, волога і попіл є небажаними елементами палива. Продукти згорання сірки в поєднанні з водою утворюють сполуки, які спричиняють руйнацію елементів конструкції та є шкідливими для навколишнього середовища. Вологість зменшує тепловий ефект горіння, оскільки забирає частину теплоти на своє випаровування. Зола зменшує теплоту згорання і погіршує економічність роботи паливних пристроїв.

Робочий склад палива описується по масі таким рівнянням

$$C^p + H^p + O^p + N^p + S_l^p + A^p + W^p = 100\%,$$

де символом  $A$  позначена зола;  $W$  – вода; верхній індекс « $p$ » вказує, що мова йде про склад робочого палива.

Склад палива висушеного при температурі  $105^{\circ}C - 110^{\circ}C$  визначає суху масу палива. Його склад описується рівнянням

$$C^c + H^c + O^c + N^c + S_l^c + A^c = 100\%,$$

де верхній індекс « $c$ » вказує, що мова йде про склад сухого палива.

Склад палива без вологості та золи утворює горючу масу

$$C^g + H^g + O^g + N^g + S_l^g = 100\%,$$

де верхній індекс « $g$ » означає, що мова йде про склад горючої маси. В горючій масі горючими є вуглець, водень і кисень.

Вказані елементи не є механічною сумішшю а знаходяться в паливі у вигляді складних з'єднань.

Важливою характеристикою палива є теплота згорання. **Теплотою згорання** називають кількість теплоти отриманої під час згорання  $1 \text{ кг}$  твердого, рідкого або  $1 \text{ м}^3$  газоподібного палива, взятого при нормальних умовах. Внаслідок горіння водню і випаровування вологи з палива утворюється водяна пара. Під час охолодження продуктів горіння можливі два випадки. I випадок: водяна пара залишається в димових газах. II випадок: водяна пара конденсується і процес супроводжується виділенням теплоти. **Нижчою теплотою згорання**  $Q_n^p$  називають кількість теплоти, що виділяється при повному згоранні палива і водяна пара залишається в димових газах. **Вищою теплотою згорання**  $Q_B^p$  називають кількість теплоти, що виділяється при повному згоранні палива і водяна пара конденсується.

Інколи в довідниковій літературі нижчу теплоту згорання дають в кілокалоріях і  $1 \text{ ккал} = 4,1868 \text{ кДж}$ .

## ***Головні стадії горіння палива***

**Горіння палива** – складний фізико-хімічний процес поєднання горючих елементів палива з киснем повітря, який супроводжується різким підвищенням температури та інтенсивним виділенням теплоти. Горіння палива можна умовно відокремити на три основних способи: шаровий (рух полум'я ламінарний), факельний (рух полум'я турбулентний) і вихровий. Кінцевим продуктом горіння є димові гази, попіл і шлак. Шлак – попіл спечений в грудки.

**Газоподібне паливо** найкраще згорає з усіх видів палива. Воно згорає при змішуванні його з повітрям. Процес змішування палива з повітрям є необхідною передумовою горіння. Розрізняють дві стадії процесу горіння: загорання та безпосереднє горіння. Процес загорання – це період в якому відбувається нагрів палива з поступовим підвищенням його температури. В момент досягнення певної температури газоподібне паливо загорасться і починається процес стійкого горіння.

Горіння **рідкого палива** відбувається переважно в парогазовому стані, оскільки температура кипіння рідкого палива значно нижча від температури його загорання. Крапелька рідкого палива, яка знаходиться у факелі горючого палива, підігрівається і поступово досягає такої температури при якій починається випаровування складових палива. Утворені гази за наявності кисню повітря згорають, що сприяє подальшому зростанню температури краплі. Горіння краплі починається з її поверхні. Цей процес супроводжується прогрівом краплі по товщині і проникненням кисню всередину краплі, де відбувається процес розщеплення і часткове горіння. Утворені всередині краплі гази виходять назовні руйнуючи її та сприяючи дальшому згоранню краплі. Оскільки згорання рідкого палива відбувається переважно в парогазовому стані, то швидкість горіння палива визначається швидкістю її випаровування з поверхні. Для швидкого та економного спалювання рідкого палива здійснюють дрібне розпилювання палива з допомогою форсунок.

Горіння **твердого палива** більш складний процес ніж горіння газоподібного і рідкого палив. Горіння починається з підігріву твердого палива. На цьому етапі спочатку, в межах температур  $105 - 110^{\circ}\text{C}$ , відбувається видалення вологості з палива. При температурі близько  $150 - 180^{\circ}\text{C}$  паливо починає розкладатись на летючі речовини і твердий залишок – кокс. Найбільш активно цей процес відбувається при температурі  $300 - 400^{\circ}\text{C}$ .

Якщо тверде паливо нагрівати без доступу повітря, то воно розкладається на дві частини: летючі речовини і твердий залишок – кокс. В летючі речовини переходять: волога, кисень, азот у вигляді складних з'єднань з іншими елементами, летюча сірка, водень як в чистому вигляді, так і в з'єднаннях з вуглецем у вигляді різних вуглеводів. В коксі залишається частина вуглеводів і зола. Склад і кількість летючих речовин суттєво впливають на процес загорання і горіння палива. Вміст горючих летючих речовин у деревині становить  $80 - 85\%$ , у торфі –  $70 - 75\%$ , у бурому вугіллі – до  $50\%$ , у кам'яному вугіллі –  $15 - 45\%$ , у антрациті –  $3 - 9\%$ .



Під час нагрівання твердого палива з доступом повітря температура летючих речовин досягає температури загорання і починається процес горіння. Летючі речовини горять над твердою частиною палива. Завдяки згоранню газоподібних речовин відбувається подальше нагрівання твердого палива і під час досягнення певної температури починається процес стійкого горіння. Ця стадія горіння характеризується найбільш високою температурою та найбільшим поглинанням кисню повітря. Заключною стадією горіння твердого палива є догорання. На цій стадії догорають незгорівші частинки палива при зменшеному тепловиділенні та менших потребах повітря. Стадія догорання переважно довготривала через те, що попел облягає паливо і зменшує доступ повітря до нього.

Повне горіння палива – це процес хімічного з'єднання горючих елементів палива з киснем повітря, який супроводжується виділенням теплоти. Димові гази, утворені в результаті повного згорання, складаються з вуглекислого газу, двоокису сірки, водяної пари, кисню і азоту.

Наявність в димових газах окису вуглецю свідчить про хімічну неповноту згорання палива. Механічною неповнотою згорання палива називають процес горіння під час якого частинки палива виносяться разом із димовими газами, шлаком або попелом. Під час спалювання рідкого або газоподібного палива механічна неповнота згорання характеризується утворенням сажі. Сажа (вуглець) утворюється внаслідок розкладу вуглеводів.

### ***Кількість повітря необхідного для згорання палива***

Теоретично можна визначити кількість повітря необхідного для повного згорання палива. На основі реакції горіння і робочого складу палива підраховується кількість повітря необхідного для повного згорання  $1 \text{ кг}$  твердого (рідкого) або  $1 \text{ м}^3$  газоподібного палива. Під час горіння з повітря використовується тільки кисень необхідна кількість якого для повного згорання  $1 \text{ кг}$  твердого чи рідкого палива визначається за формулою

$$G_{O_2} = \frac{2,67C^p + 8H^p + S_n^p - O^p}{100}, \quad (134)$$

де  $C^p, H^p, S_n^p, O^p$  – масовий вміст вуглецю, водню, сірки і кисню в паливі у відсотках. Враховуючи, що в сухому повітрі вміст кисню по масі становить 23%, а по об'єму – 21%, необхідна масова кількість повітря для повного згорання  $1 \text{ кг}$  палива визначається за формулою

$$L_0 = \frac{2,67C^p + 8H^p + S_n^p - O^p}{0,23 \cdot 100} \quad (135)$$

або 
$$L_0 = 0,115C^p + 0,345H^p + 0,043(S_n^p - O^p), \quad (136)$$

де  $[L_0] = \frac{\text{кг}}{\text{кг}}$ . Враховуючи, що при нормальних умовах (тиск  $760 \text{ мм рт ст.}$  і температурі  $t = 0^\circ \text{C}$ ) питома густина повітря дорівнює  $\rho = 1,293 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , величину об'єму повітря необхідного для згорання  $1 \text{ кг}$  палива визначають за формулою

$$V_0 = \frac{L_0}{1,293} \text{ або } V_0 = 0,089C^p + 0,266H^p + 0,033(S_n^p - O^p). \quad (137)$$

Теоретична кількість повітря необхідна для повного згорання  $1 \text{ м}^3$  газоподібного палива визначається за формулою

$$V_0 = 0,0476 \left( 0,5CO + 0,5H_2 + 1,5H_2S + \sum \left( m + \frac{n}{4} \right) C_m H_n - O_2 \right), \quad (138)$$

де  $\sum \left( m + \frac{n}{4} \right) C_m H_n$  – різні вуглеводи, які містяться в газі.

В дійсності для забезпечення повного згорання палива необхідно подавати значно більше повітря ніж визначено теоретично. Це пояснюється недосконалістю процесу горіння, оскільки частина кисню в повітрі не згорає з паливом а видаляється із зони горіння з димовими газами. Отже, під час спалювання палива завжди подається до зони горіння більше повітря ніж визначено теоретично. **Коефіцієнтом надлишку повітря** називають відношення дійсної кількості повітря, поданого до місця горіння, до теоретично визначеної кількості повітря необхідного для повного згорання палива, тобто

$$\alpha = \frac{V_0}{V_m}.$$

Під час процесу горіння палива утворюються газоподібні продукти згорання, які називають димовими газами. В їх склад за умови повного згорання входять вуглекислий газ  $CO_2$ , сірчистий газ  $SO_2$ , кисень  $O_2$ , азот  $N_2$  і водяна пара  $H_2O$ .

**Температурою горіння палива** називають температуру, яку досягають продукти горіння внаслідок отримання ними теплоти, яка виділяється під час горіння палива.

### ***Випромінювання полум'я факела***

Одним з важливих питань, в якому повинен орієнтуватися працівник оперативно-рятувальної служби, є випромінювання факела полум'я. Факельний метод згорання палива полягає в тому, що частинки твердого порошкоподібного палива знаходяться в неперервному русі разом з потоком повітря та продуктами згорання. Відбувається турбулентний рух твердих частинок, летючих речовин, повітря та димових газів. Випромінювання факельного полум'я широко використовується в нагрівальних апаратах, а також властиве горінню в умовах пожежі. Необхідно враховувати, що променевий потік за достатньо великої інтенсивності:

- негативно впливає на організм людини під час гасіння пожежі;
- може викликати спалах горючих матеріалів, парів і газів, що сприяє розповсюдженню пожежі та виникненню нових осередків горіння;
- нагріває будівельні конструкції та обладнання до критичних температур, внаслідок чого конструкції та обладнання втрачають свої функції.

Випромінювальні характеристики факела полум'я залежать від величини температури продуктів згорання та їх хімічного складу. Структура факела полум'я залежить від стану палива (твердий, рідкий, газоподібний), що

спалюється, способу спалювання і наявності повітря в зоні горіння. Горіння супроводжується утворенням видимого і невидимого для очей полум'я.

У випадку видимого факела в складі полум'я містяться трьохатомні продукти згорання ( вуглекислий газ, водяна пара та інші) і розпечені частки сажі, наявність яких спричиняє світіння полум'я. Частинки сажі мають практично неперервний спектр поглинання. Чим вища концентрація сажі в полум'ї, тим вища випромінювальна здатність факела, а випромінювальна частка трьохатомних газів є незначною.

У випадку невидимого для очей полум'я, факел містить суміш трьохатомних продуктів згорання, азоту та кисню ( за умови надлишку повітря в зоні горіння). Випромінювальна здатність полум'я залежить, в головному, від концентрації вуглекислого газу та водяної пари.

Під час спалювання рідин утворюється видиме полум'я, яке обумовлене наявністю трьохатомних газів (вуглекислий газ, водяна пара, двоокис сірки) і частинок сажі. Під час горіння розпорошених рідин до складу полум'я входять також частинки коксу, утворення якого обумовлене термічним розщепленням великих частинок паливної речовини (під час горіння важких сортів рідкого палива).

Під час горіння твердих речовин утворюється видиме полум'я, яке має більш складну структуру, ніж під час горіння рідких продуктів. До складу факела входять: трьохатомні продукти згорання ( $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $SO_2$ ), зола, розпечені чи палаючі частинки твердого палива та летючі продукти, внаслідок нагріву твердих тіл. Під час горіння твердих речовин температура частинок золи у полум'ї дуже близька до температури газів у полум'ї. За фізичною природою випромінювання факела ближче до випромінювання твердих тіл, ніж до випромінювання газів. Тверді тіла випромінюють і поглинають енергію практично всіх довжин хвиль. Гази випромінюють і поглинають променеву енергію тільки в певних інтервалах довжин хвиль. Розрахунки потоків теплоти від факела є наближеними, оскільки визначення ступеня чорноти факела та його температури доволі складний процес. У факелі температура продуктів згорання за товщиною, а більшою мірою за висотою, неоднакова. Через це в розрахунках використовують середнє значення температури полум'я.

### ***Випромінювання полум'я факела в паливнику***

Під час розгляду питання про випромінювання полум'я в паливнику котлів, печей фахівців оперативної-рятувальної служби цікавить можливість загорання горючих матеріалів і конструкцій, розташованих поблизу нагрітих поверхонь. Густина теплового потоку, що передається випромінюванням від факела до поверхні стінки котла чи печі при внормованому режимі горіння, визначається наближено за формулою:

$$q_{\phi m} = \varepsilon_{\phi} \varepsilon_m 5,67 \left[ \left( \frac{T_{\phi}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_m}{100} \right)^4 \right], \frac{Вт}{м^2}, \quad (139)$$

де  $\varepsilon_{\phi}$  – ступінь чорноти факела;  $\varepsilon_m$  – ступінь чорноти поверхні паливника ;  $T_{\phi}$

– ефективна температура факела,  $[T_\phi] = K$ ;  $T_m$  – температура поверхні тіла на яке падає тепловий потік,  $[T_m] = K$ . Температура факела полум'я  $T_\phi$  визначається як середнє геометричне між теоретичною (адіабатною) температурою горіння речовини  $T_a$  та температурою димових газів на виході з паливника  $T_z$ , тобто  $T_\phi = \sqrt{T_a T_z}$ . Теоретична температура горіння  $T_a$  залежить від коефіцієнта надлишку повітря і розраховується за методами теорії горіння.

### ***Випромінювання полум'я факела на пожежі***

Горіння на пожежі супроводжується виділенням значної кількості теплоти, значна частина якої передається навколишнім тілам за допомогою променевого теплообміну. Частка конвекційного теплообміну в умовах пожежі, при температурі  $t > 800^\circ C$  незначна.

Під час пожеж в закритих приміщеннях, особливо під час горіння димоутворюючих речовин і браку повітря, продукти горіння швидко заповнюють приміщення істотно обмежуючи розміри полум'я. Головним механізмом теплопередачі в цьому випадку є випромінювання газового середовища а не випромінювання полум'я. Температура пожежі всередині приміщення з достатньою точністю характеризується середньооб'ємною температурою в приміщенні, де відбувається пожежа. Величина температури внутрішньої пожежі описується формулою

$$t(\tau) = 150 \ln(1 + 8\tau) + t_0, [\tau] = xv \quad (140)$$

і вона отримана на основі узагальнення експериментів. Виняток складає горіння газових струменів і вогненебезпечних рідин, які утворюють полум'я котре не коптить, а також горіння твердих речовин за великого надлишку повітря.

Великої уваги, для фахівців оперативно-рятувальної служби, викликає випромінювання факела полум'я в необмеженому об'ємі, тобто під час горіння будинків, споруд, відкритих складів небезпечних речовин і горючих рідин у резервуарах. У цьому випадку, передача теплоти випромінюванням від полум'я факела в напрямку пожежонебезпечних об'єктів створює небезпеку виникнення в них пожежі чи вибуху. За температуру зовнішньої пожежі беруть середню по поверхні полум'я температуру палаючого об'єкта. Визначити температуру зовнішньої пожежі доволі проблематично, оскільки температура полум'я в довільних точках різна.

Випромінювання створює значні перешкоди для особового складу пожежних підрозділів, які беруть участь у гасінні пожежі.

Результуючий потік теплоти, що утворюється на суміжному з факелом полум'я об'єкті, може бути визначений на основі формули

$$Q_{1-2} = \varepsilon_{3g} 5,67 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) H_{12}, \quad (141)$$

де  $\varepsilon_{3g}$  – зведений ступінь чорноти системи тіл;  $H_{12}$  – взаємна поверхня випромінювання тіл 1 і 2.

Отже, питомий потік теплоти між двома довільними тілами у діатермічному середовищі внаслідок променевого теплообміну визначається за формулою:

$$q_{1-2} = \varepsilon_{36} 5,67 \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \psi_{2-1}, \quad (142)$$

де  $\psi_{2-1}$  – середній коефіцієнт випромінювання поверхні тіла 2 на поверхню факела 1;  $T_1$  – середня температура поверхні факела;  $T_2$  – температура поверхні тіла зверненої до факела. В загальному випадку  $\varepsilon_{36}$  залежить не тільки від ступеня чорноти факела  $\varepsilon_\phi$  і другого тіла  $\varepsilon_2$ , а і від взаємного розташування цих тіл. Однак у більшості випадків зведений ступінь чорноти визначають за формулою  $\varepsilon_{36} = \varepsilon_\phi \varepsilon_2$ .

Оскільки форма полум'я факела не прямокутна, то здійснюють заміну даної форми факела прямокутником, площа якого дорівнює площі поверхні полум'я факела. Значення коефіцієнта опромінювання  $\psi_{2,1}$  для деяких випадків вказано в розділі “Теплообмін випромінюванням між твердими тілами довільно розташованими в просторі”.

Допустима густина опромінення для людини  $q_{дон} = 1050 \frac{Вт}{м^2}$ . Гранично допустима температура нагріву шкіри людини  $T_2 = 313K$ . Ступінь чорноти шкіри людини  $\varepsilon_2 = 0,95$ .

Для горючих матеріалів, які містяться в пожежних машинах, допустима густина опромінення  $q_{дон} = 12600 - 12800 \frac{Вт}{м^2}$ . Ступінь чорноти поверхні машини приймають  $\varepsilon_2 = 0,94$ .

Використовуючи закономірності променевого теплообміну можна оцінити параметри безпечної роботи особового складу підрозділів, що беруть участь у гасінні пожежі. В таблиці вказано необхідний захист та допустимий період перебування людей в зоні теплової радіації.

Таблиця

$q_{кр}, \frac{Вт}{м^2}$	Допустимий період перебування, хв.	Потрібний захист людей	Ступінь теплового впливу на шкіру людини
3000	не обмежується	без захисту	більшості відчуття відсутні
4200	не обмежується	в бойовому одязі і в касках із захисним склом	нестерпні більші відчуття через 20 с
7000	5	те ж	нестерпні більші відчуття миттєво
8500	5	в бойовому одязі, що змочений водою, та в касках із захисним склом	опіки через 20 с
10500	5	те ж, але під захистом розпорошених струменів води або водяних завіс	миттєві опіки

## Методика розв'язування задач

Задача. Визначити чи задовольняє умові протипожежної безпеки віддаль  $r = 4\text{ м}$  на якій знаходиться соснова дерев'яна стінка від джерела вогню. Вважати, що факел має прямокутну форму  $6\text{ м} \times 12\text{ м}$ , температура факела  $1300\text{ К}$  і ступінь чорноти факела  $\varepsilon_\phi = 0,6$ . Коефіцієнт безпеки  $\kappa_{\text{безп}} = 1,2$ .

З таблиці “Допустима густина опромінення і допустима температура нагріву деяких горючих матеріалів” отримаємо, що допустима густина теплового потоку для дерева дорівнює  $q_{\text{дон}} = 12800 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$  і температура самозагорання  $t_{\text{заг}} = 295^\circ \text{С}$ . Ступінь чорноти дерева  $\varepsilon_2 = 0,9$ .

Умова пожежної безпеки при випромінюванні факела під час зовнішньої пожежі має вигляд:

$$\kappa_{\text{безп}} \varepsilon_{\text{зв}} 5,67 \left[ \left( \frac{T_\phi}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{дон}}}{100} \right)^4 \right] \psi_{2,1} \leq q_{\text{дон}}, \quad (143)$$

де  $\kappa_{\text{безп}}$  – коефіцієнт безпеки; його величину обирають залежно від категорії пожежної безпеки та інших факторів.

Коефіцієнт випромінювання визначаємо за формулою

$$\psi_{2,1} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4r^2}} \arctg \frac{b}{\sqrt{a^2 + 4r^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} \arctg \frac{a}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} \right).$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$\psi_{2,1} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4 \cdot 4^2}} \arctg \frac{12}{\sqrt{6^2 + 4 \cdot 4^2}} + \frac{12}{\sqrt{12^2 + 4 \cdot 4^2}} \arctg \frac{6}{\sqrt{12^2 + 4 \cdot 4^2}} \right),$$

тобто  $\psi_{2,1} = 0,54346$ .

Густину теплового потоку від факела полум'я до дерев'яної стінки визначаємо за формулою

$$q_{1,2} = \varepsilon_{\text{зв}} 5,67 \left[ \left( \frac{T_\phi}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{дон}}}{100} \right)^4 \right] \psi_{2,1},$$

де  $\varepsilon_{\text{зв}} = \varepsilon_\phi \varepsilon_2$ .

Враховуючи значення величин отримаємо, що

$$q_{1,2} = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 5,67 \left[ \left( \frac{1300}{100} \right)^4 - \left( \frac{295 + 273}{100} \right)^4 \right] 0,54346$$

тобто  $q_{1,2} = 45792 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

Оскільки  $\kappa_{\text{безп}} q_{1,2} = 1,2 \cdot 45792 = 54951 \geq q_{\text{дон}} = 12800$ , то віддаль від джерела вогню до соснової дерев'яної стінки не задовольняє умові протипожежної безпеки.

## Тема 8. Температурний режим під час пожежі в приміщенні

**Пожежа** в приміщенні – це термодинамічний процес, який супроводжується виділенням теплоти, зміною складу і параметрів газового середовища, яке заповнює приміщення. Газове середовище в приміщенні з прорізами (вікна, двері і т.д.), які поєднують його із зовнішньою атмосферою, є складною термодинамічною системою. Зміна параметрів стану системи обумовлена обміном теплоти з навколишнім середовищем. Газове середовище, з достатньою точністю, можна розглядати як суміш ідеальних газів. Головні термодинамічні параметри стану газу в кожній точці простору зв'язані між собою рівнянням Клапейрона-Менделєєва  $pV = m \frac{R}{\mu} T$ . Стан газового

середовища під час пожежі в приміщенні характеризується полями локальних термодинамічних параметрів стану. Однак стан газового середовища під час пожежі в приміщенні можна характеризувати також з допомогою середньо об'ємних термодинамічних параметрів, пов'язаних між собою рівняннями, які отримуються з умови існування локальної рівноваги. Використовуючи середньооб'ємні параметри стану газового середовища можна прослідкувати загальні закономірності процесу розвитку пожежі, виявити його найбільш характерні особливості і фактори, які спричиняють ці особливості. Знання цих закономірностей необхідне для прийняття рішень пов'язаних із забезпеченням безпечної евакуації людей з приміщення у випадку виникнення пожежі; вироблення оперативного плану гасіння пожежі; оцінки фактичної вогнестійкості споруди; проведення пожежно-технічної експертизи.

Основними середньооб'ємними параметрами стану газового середовища під час пожежі в приміщенні є середня температура  $T_{\text{сум}}$ , середньо об'ємна густина  $\rho_{\text{сум}}$ , середньо об'ємний тиск  $p_{\text{сум}}$ , середня концентрація компонентів газової суміші ( $O_2, CO_2, CO, N_2$ ) і т. д. Для характеристики стану газового середовища під час пожежі в приміщенні використовується специфічний параметр стану – середньооб'ємну оптичну густину диму  $\mu_{\text{сум}}$ .

Середньооб'ємні параметри стану газового середовища в приміщенні

Середньооб'ємна густина. Вивчимо процес розвитку пожежі в конкретний момент часу. Розглянемо приміщення з вільним об'ємом  $V$  та довільною кількістю прорізів. **Вільний об'єм** – це величина, яка дорівнює різниці між об'ємом приміщення та об'ємом обладнання розміщеного в ньому. Нехай маса газу, яка міститься в приміщенні в цей момент часу, дорівнює  $m$ . Поділивши масу газу на вільний об'єм приміщення отримаємо середньооб'ємну густину газу  $\rho_{\text{сум}} = \frac{m}{V}$ . **Середньооб'ємна густина** – газової суміші це маса газу,

яка міститься в одиниці вільного об'єму приміщення. Середньооб'ємна густина  $\rho_{\text{сум}}$  пов'язана з локальними значеннями густини  $\rho(x, y, z, t)$ . Оскільки

$dm = \rho dV$ , то маса газу в приміщенні дорівнює  $m = \int_V \rho(x, y, z, t) dV$ . Отже,

середньооб'ємна густина газу дорівнює  $\rho_{\text{сум}} = \frac{1}{V} \int_V \rho(x, y, z, t) dV$ .

Середньо об'ємна парціальна густина і концентрація компонента газового середовища. Позначимо символом  $m_i$  масу  $i$ -ого компонента суміші, який міститься в приміщенні, в даний момент часу. Поділивши масу компонента  $m_i$  на об'єм приміщення отримаємо **середньооб'ємну парціальну густину**  $i$ -ого компонента суміші, тобто  $\rho_{\text{сум}i} = \frac{m_i}{V}$ .

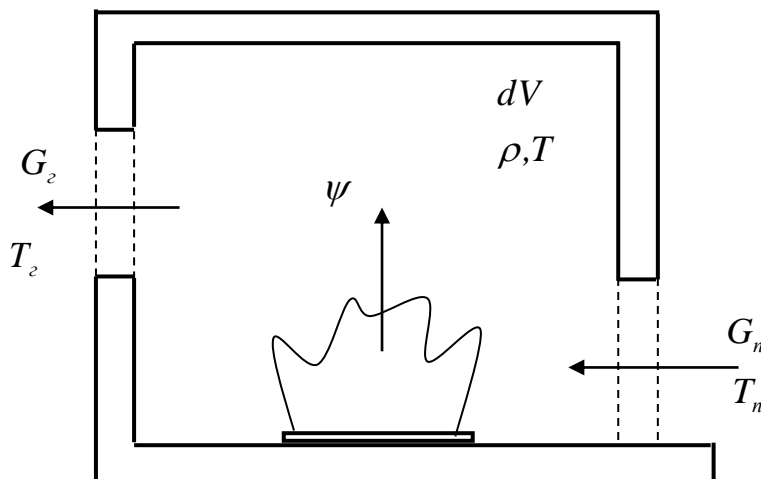


Рис. 15. Схема пожежі в приміщенні

Якщо локальне значення парціальної густини  $i$ -ого газу  $\rho_i(x, y, z, t)$ , то **середньо-об'ємна парціальна густина**  $i$ -ого компонента газу дорівнює  $\rho_{\text{сум}i} = \frac{1}{V} \int_V \rho_i(x, y, z, t) dV$ . Між середньооб'ємною густиною суміші газів  $\rho_{\text{сум}}$  та парціальними густинами газів  $\rho_{\text{сум}i}$  існує залежність  $\rho_{\text{сум}} = \sum \rho_{\text{сум}i}$ . **Середньо-об'ємною концентрацією**  $i$ -ого компонента газової суміші називають відношення маси  $i$ -ого компонента  $m_i$  до всієї маси суміші газів  $m$ , тобто

$$x_i = \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_{\text{сум}i}}{\rho_{\text{сум}}}$$

Розіб'ємо вільний об'єм приміщення  $V$  на елементарні об'єми  $dV$ . Тиск в елементарному об'ємі дорівнює  $p(x, y, z, t)$ , де  $x, y, z$  – координати елементарного об'єму,  $t$  – час. В різних точках простору приміщення тиск різний. **Середньо-об'ємний тиск** визначають за формулою

$$p_{\text{сум}} = \frac{1}{V} \int_V p(x, y, z, t) dV$$

В умовах реальної пожежі, якщо відсутні ударні хвилі, значення тиску в різних точках приміщення суттєво не відрізняються. Найбільша відмінність тиску може становити десятки паскалів. Ця величина становить десятки долі відсотка від середнього тиску в приміщенні. Отже, в умовах реальної пожежі можна вважати, що відмінність між середньооб'ємним



тиском і локальним тиском незначна, тобто  $\frac{p}{p_{\text{сум}}} \cong 1$ . Аналогічно, локальне значення газової сталої  $R$  суттєво не відрізняється від середньооб'ємного значення газової сталої  $R_{\text{сум}}$ , тобто  $\frac{R}{R_{\text{сум}}} \cong 1$ .

Враховуючи рівняння Клапейрона-Менделєєва  $pV = \frac{mRT}{\mu}$  отримаємо,

що  $\frac{m}{V} = \frac{\rho\mu}{RT}$  або  $\rho = \frac{\rho\mu}{RT}$ , тоді маса газової суміші в приміщенні дорівнює

$m = \int_V \frac{\rho\mu}{RT} dV$ . Оскільки  $p_{\text{сум}}V = \frac{mR_{\text{сум}}T_{\text{сум}}}{\mu}$  і враховуючи, що  $p \cong p_{\text{сум}}$ ,  $R \cong R_{\text{сум}}$ ,

отримаємо  $\frac{p_{\text{сум}}\mu V}{R_{\text{сум}}T_{\text{сум}}} = \int_V \frac{\rho\mu}{RT} dV$  або  $T_{\text{сум}} = \frac{V}{\int_V \frac{1}{T} dV}$ . Отже, середню температуру

$T_{\text{сум}}$ , з достатньою для інженерної практики точністю, можна визначати за

формулою  $T_{\text{сум}} = \left[ \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{T} dV \right]^{-1}$ . Середньооб'ємна температура визначається з

умови існування локальної рівноваги. Середньооб'ємну температуру можна

визначати за формулою  $T'_{\text{сум}} = \frac{1}{V} \int_V T dV$ . В неоднорідному температурному полі

середня температура  $T_{\text{сум}}$  є менша від середньооб'ємної температури  $T'_{\text{сум}}$ . В

умовах реальної пожежі відмінність між цими величинами становить 5 – 10%.

Основні локальні параметри стану газового середовища пов'язані між собою

рівнянням Клапейрона-Менделєєва  $pV = m \frac{R}{\mu} T$ ,  $\frac{m}{V} = \frac{\rho\mu}{RT}$  або  $\rho = \frac{\rho\mu}{RT}$ . Надалі,

згідно з попередніми твердженнями, можна використовувати формулу

$$\rho_{\text{сум}} = \frac{p_{\text{сум}}\mu_{\text{сум}}}{R_{\text{сум}}T_{\text{сум}}}. \quad (134)$$

### ***Рівняння пожежі***

Рівняння пожежі описують зміну середньооб'ємних параметрів стану суміші газів в процесі розвитку пожежі. Ці рівняння отримують з основних законів фізики: закону збереження маси і першого закону термодинаміки (закон збереження енергії).

Рівняння матеріального балансу. Розглядаємо приміщення з вільним об'ємом  $V$  та довільною кількістю прорізів, які з'єднують приміщення із зовнішнім повітрям. В процесі пожежі в приміщенні змінюється температура, густина і сумарна маса газу. Газове середовище містить в собі маленькі тверді частинки. Доля теплової енергії, яка припадає на них, суттєво незначна в

порівнянні з енергією, яку містить в собі газове середовище. Не суттєвим є вплив маси твердих частинок на сумарну масу газового середовища, яке заповнює приміщення. Отже, можна знехтувати наявністю твердих частинок під час визначення середньооб'ємних густини, тиску та температури. Нехай в момент часу  $\tau$  маса газу дорівнює  $m = \rho_{\text{сум}} V$ . За малий проміжок часу  $d\tau$  маса газу зміниться на малу величину  $d(\rho_{\text{сум}} V)$ . За цей проміжок часу через одні прорізи витече деяка кількість газу  $G_2 d\tau$ , а через інші – надійде повітря ззовні масою  $G_n d\tau$ , де  $G_2$  – маса газоподібних продуктів згорання, яка витікає з приміщення за одиницю часу,  $[G_2] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ ;  $G_n$  – маса повітря, яке надходить в приміщення за одиницю часу,  $[G_n] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ . Крім того, частина горючого матеріалу всередині приміщення перейде в газоподібний стан. Кількість горючого матеріалу, яка перейде в газоподібний стан, залежить від швидкості вигорання матеріалу. **Швидкість вигорання  $\psi$**  – це кількість горючого матеріалу, яка перейшла в газоподібний стан за одиницю часу,  $[\psi] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ . Для малого проміжку часу  $d\tau$  змінами величин  $G_n$ ,  $G_2$  і  $\psi$  можна знехтувати. Отже, кількість газів, яка покинула приміщення за час  $d\tau$  дорівнює  $G_2 d\tau$ , а кількість повітря, яка надходить в приміщення за цей же проміжок часу дорівнює  $G_n d\tau$  і кількість горючого матеріалу, який перейшов в газоподібний стан і заповнив об'єм приміщення, дорівнює  $\psi d\tau$ . Згідно закону збереження маси отримаємо

$$d(\rho_{\text{сум}} V) = G_n d\tau + \psi d\tau - G_2 d\tau \quad \text{або} \quad \frac{d(\rho_{\text{сум}} V)}{d\tau} = G_n + \psi - G_2. \quad (135)$$

Це рівняння називають **рівнянням матеріального балансу** пожежі в приміщенні. В багатьох випадках змінами вільного об'єму приміщення  $V$  можна знехтувати. Враховуючи це твердження, рівняння матеріального балансу пожежі в приміщенні запишемо таким чином:

$$V \frac{d(\rho_{\text{сум}})}{d\tau} = G_n + \psi - G_2. \quad (136)$$

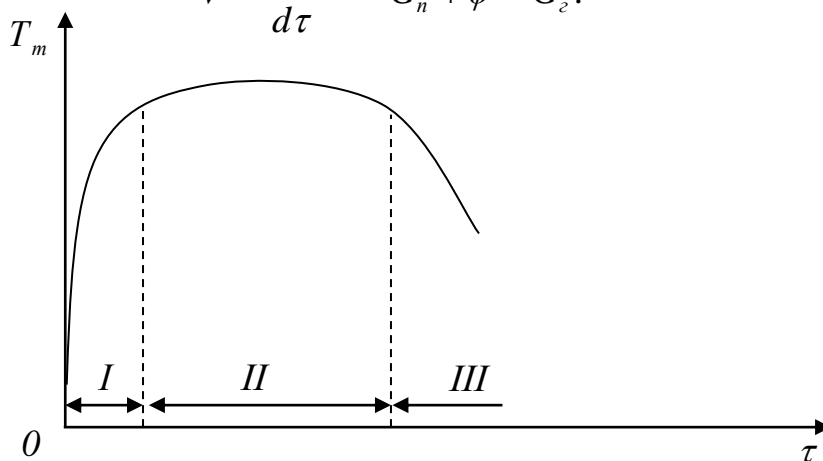


Рис. 16. Режими пожежі

На початковій стадії пожежі, в першому наближенні, можна вважати, враховуючи (134), що середньо об'ємна густина  $\rho_{\text{сум}}$  обернено пропорційна до температури, тобто  $\rho_{\text{сум}} \approx \frac{1}{T_{\text{сум}}}$ , оскільки зміна величини  $\frac{P_{\text{сум}} \mu_{\text{сум}}}{R_{\text{сум}}}$  під час пожежі незначна.

Аналізуючи рівняння (136) можна виділити три режими розвитку пожежі.

**Режим I** реалізовується на етапі зростання температури, яке приводить до зменшення густини газів. В цьому режимі відбувається зменшення густини газів із плином часу, тобто  $\frac{d\rho_m}{d\tau} < 0$ . Отже, з рівняння (136) отримаємо, що  $G_n + \psi < G_z$ , тобто кількість газів, які витікають через прорізи, більша, ніж кількість повітря, яке надходить в приміщення, разом з горючим матеріалом, яке перейшло в газоподібний стан. Нерівність тим різочіша, чим вища швидкість зростання температури в об'ємі приміщення.

**Режим II** – це режим при якому в приміщенні температура і густина газу змінюються незначно, тобто  $\frac{d\rho_m}{d\tau} = 0$ . В цьому режимі виконується рівність  $G_n + \psi = G_z$ . Даний режим називають квазістаціонарним. В квазістаціонарному режимі кількість повітря, яке надійшло, та маса горючого матеріалу, яка перейшла в газоподібний стан, дорівнює масі газів, яка витікає через прорізи.

**Режим III** – це режим зниження температури і зростання густини газів, тобто  $\frac{d\rho_m}{d\tau} > 0$ . В цьому режимі виконується нерівність  $G_n + \psi > G_z$ . Отже в III – ому режимі кількість газу, яка витікає, менша за кількість повітря, яке надходить в приміщення, та горючого матеріалу, який перейшов в газоподібний стан.

### ***Температурний режим під час пожежі в приміщенні***

Під температурним режимом під час пожежі в приміщенні розуміють зміну температури продуктів згорання в часі та просторі. Практика і спеціально проведені дослідження показали, що температурний режим під час пожежі в приміщенні залежить від кількості і властивостей горючих матеріалів, розмірів приміщення, умов теплообміну та газообміну. Кількість теплоти  $Q_0$ , яка виділяється під час пожежі в приміщенні, визначається за формулою

$$Q_0 = \eta Q_n^p M f \quad (137)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт неповноти згорання;  $Q_n^p$  – нижня теплота згорання матеріалу,  $[Q_n^p] = \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ ;  $M$  – масова швидкість вигорання,  $[M] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{год}}$ ;  $f$  – площа поверхні горіння,  $[f] = \text{м}^2$ . Теплота, яка виділяється під час горіння, витрачається на нагрів газів в приміщенні  $Q_z$ , нагрів обладнання та поверхонь

обмежуючих приміщення  $Q_{нов}$ . Гази, обладнання і поверхні нагріваються з допомогою конвекційного та променевого теплообмінів, тобто

$$Q_{нов} = Q_{конв} + Q_{пром} = \alpha_k F (T_z - T_{нов}) + 5,67 \varepsilon_y F \left( \left( \frac{T_z}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{нов}}{100} \right)^4 \right), \quad (138)$$

де  $Q_{конв}$  – кількість теплоти, яка йде на нагрівання обладнання та поверхні приміщення внаслідок конвекційного теплообміну;  $Q_{пром}$  – кількість теплоти, яка йде на нагрівання обладнання та поверхні приміщення внаслідок променевого випромінювання;  $\alpha_k$  – коефіцієнт конвекційного теплообміну (тепловіддачі),  $[\alpha_k] = \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$ ;  $F$  – площа поверхонь теплообміну,  $[F] = м^2$ ;  $T_z$  – температура газів в приміщенні,  $[T_z] = К$ ;  $T_{нов}$  – температура обмежуючих поверхонь,  $[T_{нов}] = К$ ;  $\varepsilon_y$  – узагальнений ступінь чорноти між факелом і димовими газами, з однієї сторони, і обмежуючими поверхнями – з другої.

Величину коефіцієнта теплообміну  $\alpha_k$  у випадку пожежі в приміщенні, коли необхідно врахувати як конвекційний теплообмін, так і промєневе випромінювання, визначають за формулою  $\alpha_k = 11,63 e^{0,0023t_z}$ , де  $t_z$  середня температура газів в приміщенні.

Кількість теплоти, яка йде на нагрівання газів, описується формулою

$$Q_z = \eta M f V_z c_p (T_z - T_0), \quad (139)$$

де  $V_z$  – об'єм газу, який утворюється під час згорання  $1$  кг горючих матеріалів, що нагрівається,  $[V_z] = \frac{м^3}{кг}$ ;  $c_p$  – об'ємна теплоємність газової суміші під сталим тиском,  $T_0$  – початкова температура газу;  $T_z$  – середньооб'ємна температура газів.

Використовуючи рівняння (137) і (139) запишемо баланс тепловиділення та тепловтрат в такому вигляді:  $Q_0 = Q_z + Q_{конв} + Q_{пром}$  або

$$\eta Q_n^p M f = \eta M f V_z c_p (T_z - T_0) + \alpha_k F (T_z - T_{нов}) + 5,67 \varepsilon_y F \left( \left( \frac{T_z}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{нов}}{100} \right)^4 \right). \quad (140)$$

Рівняння (140) може бути розв'язано методом послідовних наближень відносно шуканої величини – температури газів  $T_z$ . При цьому всі інші величини, для довільного моменту часу, повинні визначатися незалежним шляхом.

Швидкість вигорання  $M$ , нижня теплота згорання  $Q_n^p$  і об'єм повітря  $V_n$ , необхідного для повного згорання  $1$  кг палива, визначають експериментальним шляхом і для деяких матеріалів ці величини вказані в таблиці.

### **Температурний режим під час пожежі в житлових та громадських спорудах**

Під час пожеж в житлових і громадських спорудах горять в основному одні і ті ж матеріали. Їх кількість на одиницю площі приміщення, умови теплообміну та газообміну в приміщенні, наближено, однакові. Температурний

режим в таких спорудах майже однаковий і має характер вказаний на рис. 17. На початку пожежі температура газів в приміщенні швидко зростає до  $250^{\circ}\text{C}$ . Потім, внаслідок недостатньої кількості повітря в приміщенні для горіння, температура газів знижується і тільки після руйнування віконного скла починає різко зростати. Проміжок часу через який може наступити руйнування віконного скла може досягати  $30 - 40$  хв.

Вважається, що ділянка температурної кривої, після руйнування віконного скла, описується рівнянням

$$t(\tau) = 149,8 \ln(1 + 8\tau), \quad (141)$$

де час  $\tau$  необхідно брати в хвилинах,  $[\tau] = \text{хв}$ ; розмірність температури –  $[t] = ^{\circ}\text{C}$ . Стандартний температурний режим (141) характеризується даними вказаними в таблиці:

$\tau, \text{хв}$	5	10	15	30	60	90	120	180	240	360
$t, ^{\circ}\text{C}$	556	659	718	821	925	986	1029	1090	1133	1193

Стандартний температурний режим можна описувати рівнянням

$$t(\tau) = 149,8 \ln(1 + 8\tau) + t_0, \quad (142)$$

де  $t_0$  – температура в приміщенні на початку пожежі.

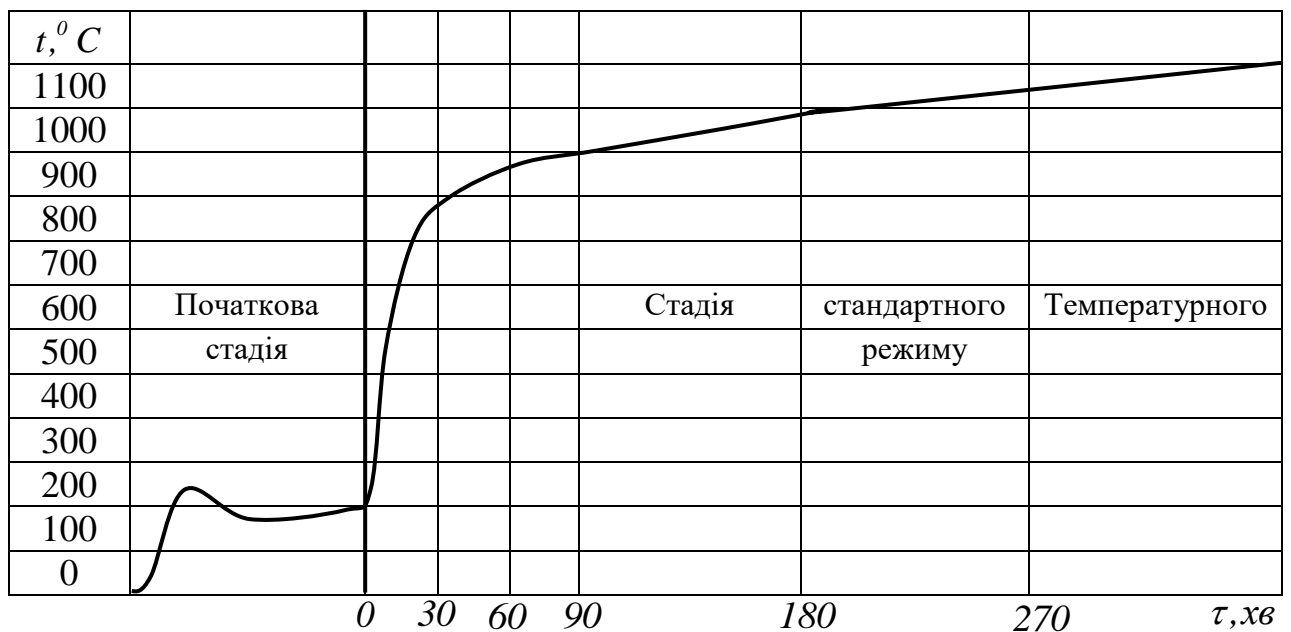


Рис. 17. Температурний режим в житлових і громадських спорудах

## Тема 9. Теплообмінні апарати

### Вступ. Основні положення

**Теплообмінним апаратом** називають прилад для передачі теплоти від одного теплоносія до іншого. Рідину (крапельну чи газ), яку використовують в якості гріючої або нагріваючої, називають **теплоносієм**. Середовище з більш високою температурою на вході до теплообмінного апарата називають

**первинним** або **гарячим теплоносієм**. Середовище з більш низькою температурою на вході до теплообмінного апарата називають **вторинним** або **холодним теплоносієм**.

Теплообмінники класифікують за принципом дії, призначенням, конструктивним оформленням, видом теплоносіїв і схемою руху теплоносіїв.

За принципом дії теплообмінники поділяються на поверхневі та змішувальні.

До поверхневих теплообмінників відносяться рекуператори та регенератори, в яких теплота від первинного до вторинного теплоносія передається із використанням поверхні теплообміну.

В **рекуператорах** (рекуперативних теплообмінних апаратах) теплота передається від гарячого до холодного теплоносія крізь тверду стінку (поверхню теплообміну), яка відокремлює гарячий та холодний теплоносії. В них гарячі та холодні теплоносії рухаються одночасно. Температура нагріву гарячого теплоносія досягає  $400^{\circ} - 500^{\circ}C$  для конструкцій з вуглецевих сталей і  $700^{\circ} - 800^{\circ}C$  для конструкцій із легованих сталей. До рекуперативних теплообмінних апаратів відносяться, *наприклад*, пароперегрівачі, парогенератори, конденсатори, батареї центрального опалення та інші. В рекуперативних теплообмінних апаратах, у робочих режимах, теплообмін відбувається в стаціонарному температурному режимі.

В **регенераторах** (регенеративних теплообмінних апаратах) одна й та ж поверхня через певні проміжки часу омивається то гарячим, то холодним теплоносіями, тобто спочатку вона акумулює теплоту від гарячого теплоносія а потім віддає теплоту холодному теплоносію. Температура гарячого теплоносія досягає  $1000^{\circ} - 1200^{\circ}C$ . Такими є, *наприклад*, регенератори мартенівських та доменних печей. В регенераторі відбуваються нестационарні температурні процеси, оскільки температурне поле поверхні весь час змінюється.

У **змішувальних** теплообмінних апаратах теплообмін відбувається під час безпосереднього змішування гарячих та холодних рідин. Це, *наприклад*, скрубери, градирні, де вода охолоджується повітрям, бойлери, в яких підігрів води здійснюється парою, та інші. Для збільшення поверхні і часу контакту між гарячим та холодним теплоносіями рідину переважно розпорошують на спеціальну насадку звідки вона стікає рухаючись протипливом відносно до напрямку руху гарячого теплоносія.

За конструктивним оформленням поверхні теплообміну теплообмінники поділяються на трубчасті (з гладких або ребристих труб), пластинчасті (з плоских або фігурних штампованих листів), насадочні (в яких поверхнею теплообміну є додаткові тіла: скляні, керамічні, металеві кільця або кульки) та інші.

Трубчасті теплообмінники дають можливість досягати різноманітних компоновок і здатні витримувати високий тиск.

Пластинчасті теплообмінники використовують тоді, коли при відносно низьких тисках необхідно досягнути високої компактності теплообмінника.

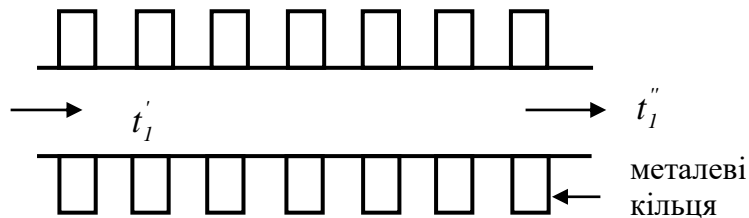


Рис. 18. Схема теплообмінника з насадочними металевими кільцями

За видом теплоносія теплообмінники поділяються на рідинні, газові та рідинно-газові.

За схемою руху теплоносія теплообмінники поділяються на прямопливні, протипливні, перехреснопливні та інші. В прямопливному теплообміннику теплоносії рухаються паралельно один до одного в одному напрямі. В протипливному теплообміннику теплоносії рухаються паралельно один до одного в протилежних напрямках. На практиці зустрічаються теплообмінники з різними складними схемами руху рідини.



Рис. 19. Схеми руху теплоносіїв в теплообмінних апаратах

В змієподібному теплообміннику гарячий теплоносії рухається всередині змієвика, а холодний теплоносії – зовні трубок теплообмінника.

В теплообміннику типу "труба в трубі" труба меншого діаметра міститься в трубі більшого діаметра. Всередині меншої труби та в просторі між трубами рухаються теплоносії.

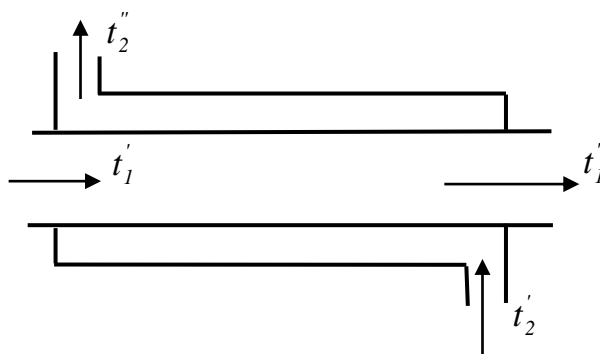


Рис. 20. Схема теплообмінника "труба в трубі"

$t_1'$  – температура гарячого теплоносія на вході в теплообмінник;  $t_1''$  – температура гарячого теплоносія на виході з теплообмінника;  $t_2'$  – температура холодного теплоносія на вході в теплообмінник;  $t_2''$  – температура холодного теплоносія на виході з теплообмінника.

**Температурним тиском** називають перепад температур між гарячим та холодним теплоносіями в довільному перерізі апарата, тобто  $\Delta t = t_1 - t_2$ . В загальному випадку температурний тиск змінюється вздовж поверхні теплообміну. Розрізняють температурний тиск на вході до теплообмінника, де  $\Delta t' = t_1' - t_2'$  – для прямопливу і  $\Delta t' = t_1' - t_2''$  – для протипливу. Температурний тиск на виході з теплообмінника дорівнює  $\Delta t'' = t_1'' - t_2''$  – для прямопливу і  $\Delta t'' = t_1'' - t_2'$  – для протипливу.

**Температурним перепадом** називають різницю між найбільшою та найменшою температурами теплоносія, тобто  $\delta t_1 = t_1' - t_1''$  і  $\delta t_2 = t_2'' - t_2'$ .

### **Основні рівняння теплового розрахунку теплообмінних апаратів**

В основі теплових розрахунків теплообмінних апаратів лежать рівняння теплового балансу та рівняння теплопередачі. Якщо в теплообміннику відсутні фазові перетворення (кипіння, конденсація) теплоносіїв, то рівняння теплового балансу запишемо у вигляді:

$$Q = G_1 c_{p1} (t_1' - t_1'') = G_2 c_{p2} (t_2'' - t_2'), \quad (143)$$

де  $G_1$  – маса гарячого теплоносія, яка поступає та виходить з теплообмінника, за одиницю часу, тобто  $[G_1] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ ;  $G_2$  – маса холодного теплоносія, яка

поступає та виходить з теплообмінника, за одиницю часу, тобто  $[G_2] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ ;  $c_{p1}$  і

$c_{p2}$  – середні питомі теплоємності теплоносіїв під сталим тиском, тобто

$[c_{pi}] = \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ . Величини  $c_{p1}G_1$  і  $c_{p2}G_2$  називають **водяними еквівалентами**

потоків теплоносіїв.

Рівняння теплопередачі для теплообмінного апарата має вигляд:

$$Q = k \Delta t_{cp} F_{заг}, \quad (144)$$

де  $k$  – коефіцієнт теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного;  $\Delta t_{cp}$  – середня різниця температур між гарячим і холодним теплоносіями;  $F_{заг}$  – загальна площа поверхні теплообміну між теплоносіями.

Значення коефіцієнта теплопередачі  $k$  визначають конкретно для кожного випадку теплообміну. Якщо величину коефіцієнта теплопередачі визначити не можливо, то наближено його приймають під час передачі теплоти

від газу до газу –  $10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ , від газу до води –  $50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ , від води до води –

$1000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ .

Середній тиск температур в теплообмінному апараті визначаємо за формулою



$$\Delta t_{cp} = \frac{1}{F_{заг}} \int_0^{F_{заг}} \Delta t(x) dF, \quad (145)$$

де  $\Delta t(x) = t_1(x) - t_2(x)$  температурний тиск між гарячим і холодним теплоносіями залежно від координати  $x$ . Середній температурний тиск залежить від схеми руху теплоносіїв в теплообмінних апаратах і співвідношення між їх масовими витратами.

Зміну температур теплоносіїв вздовж поверхні теплообмінника під час прямопливу або протипливу схематично вказано на рис. 21.

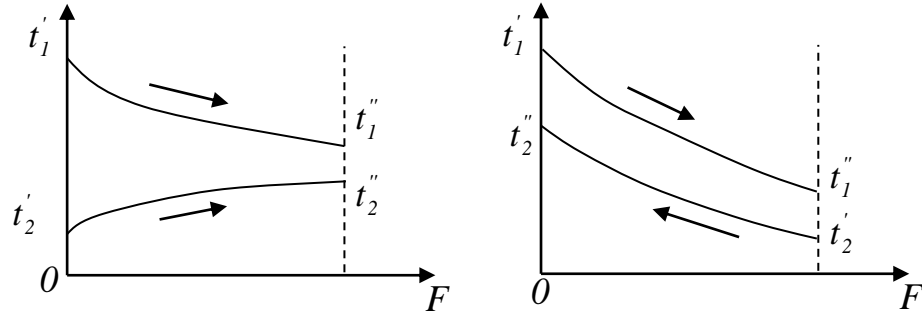


Рис. 21. Характер зміни температури теплоносіїв під час прямопливу та протипливу

Зміну температур теплоносіїв вздовж поверхні теплообмінника під час прямопливу або протипливу можна описати аналітично.

Розглянемо теплообмінний апарат, який працює на прямопливі. Виокремимо елемент теплообмінника з площею  $dF$ . Рівняння теплопередачі для цього елемента має вигляд:

$$dQ = k(t_1(x) - t_2(x))dF = k\Delta t(x)dF, \quad (146)$$

де  $\Delta t$  температурний тиск. З теплового балансу для виокремленого елемента апарата можна записати:

$$dQ = -c_{p1}G_1 dt_1, \quad (147)$$

$$dQ = c_{p2}G_2 dt_2. \quad (148)$$

Оскільки  $dt_1 < 0$ , то у виразі (147) міститься знак “-”. З даних рівнянь

отримаємо, що  $dt_1 = -\frac{dQ}{c_{p1}G_1}$  та  $dt_2 = \frac{dQ}{c_{p2}G_2}$ . Тоді  $dt_1 - dt_2 = d(t_1 - t_2) = d\Delta t$  або

$$d\Delta t = -\left(\frac{1}{c_{p1}G_1} + \frac{1}{c_{p2}G_2}\right)dQ. \quad (149)$$

Вводячи позначення 
$$m = \frac{1}{c_{p1}G_1} + \frac{1}{c_{p2}G_2} \quad (150)$$

отримаємо, що 
$$d\Delta t = -m dQ. \quad (151)$$

Враховуючи (146) і (151) отримаємо

$$d\Delta t = -mk\Delta t dF.$$

Зінтегрувавши дане рівняння  $\int_{\Delta t'}^{\Delta t} \frac{d\Delta t}{\Delta t} = -\int_0^F m k dF$  отримаємо, що

$$\ln \frac{\Delta t(x)}{\Delta t'} = -mkF(x), \quad (152)$$

де  $\Delta t'$  температурний тиск між гарячим і холодним теплоносіями на початку теплообмінного процесу. З цього рівняння запишемо залежність

$$\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'} = -mkF_{заг}, \quad (153)$$

де  $F_{заг}$  загальна площа на якій здійснюється теплообмін між теплоносіями.

Рівняння (152) перепишемо у вигляді:

$$\Delta t(x) = \Delta t' e^{-mkF}. \quad (154)$$

Аналізуючи формулу (154) можна стверджувати, що в теплообмінних апаратах з прямопливом, температурний тиск спадає за експоненціальним законом. З рівняння (153) отримаємо таку залежність:

$$\Delta t'' = \Delta t' e^{-mkF_{заг}}. \quad (155)$$

Для визначення середнього тиску температур використаємо формули

(145) і (154), тобто  $\Delta t_{cp} = \frac{1}{F_{заг}} \int_0^{F_{заг}} \Delta t' e^{-mkF} dF$ . Зінтегрувавши праву частину

тримаємо, що

$$\Delta t_{cp} = \Delta t' \frac{1 - e^{-mkF_{заг}}}{mkF_{заг}}.$$

Враховуючи (153) і (155) отримаємо формулу для визначення середнього тиску температур під час прямопливу

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}}, \quad (156)$$

де  $\Delta t' = t_1' - t_2'$  і  $\Delta t'' = t_1'' - t_2''$ .

Формула для визначення середнього температурного тиску під час протипливу визначається аналогічним чином і дорівнює

$$\Delta t_{cp} = \frac{(t_1' - t_2'')' - (t_1'' - t_2')}{\ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}}. \quad (157)$$

Формули (156) і (157) можна об'єднати і записати у вигляді

$$\Delta t = \frac{\Delta t_B - \Delta t_M}{\ln \frac{\Delta t_B}{\Delta t_M}}, \quad (158)$$

де  $\Delta t_B$  – найбільша різниця температур;  $\Delta t_M$  – найменша різниця температур між гарячим і холодним теплоносіями. Середній тиск температур визначений за формулою (158) називають **середнім логарифмічним температурним тиском**. Якщо температура теплоносіїв вздовж поверхні теплообміну змінюється незначно, то середній тиск температур можна визначати за формулою:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_B + \Delta t_M}{2}. \quad (159)$$

Наближений розрахунок теплообмінних апаратів здійснюють використовуючи рівняння теплового балансу:

$$Q = c_{p1} G_1 (t_1' - t_1''), \quad (160)$$

$$\eta Q = c_{p2} G_2 (t_2'' - t_2') \quad (161)$$

і рівняння теплопередачі

$$Q = k(1 - \varphi_{забр}) F_{заг} \Delta t_{cp}, \quad (162)$$

де  $\eta$  – **коефіцієнт ефективності теплопередачі**, величину якого визначають експериментальним шляхом. Він вказує, що частка теплоти  $\eta Q$  йде на підвищення температури нагрітого теплоносія, а частка теплоти  $(1 - \eta)Q$  розсіюється в навколишнє середовище. Величина коефіцієнта ефективності теплопередачі змінюється в межах  $0,95 < \eta < 0,98$ .  $\varphi_{забр}$  – **коефіцієнт забруднення**. Він вказує яка частина загальної поверхні теплообміну не бере участі в теплообміні через забруднення поверхні або з інших причин.

Розв'язавши систему рівнянь (160) – (162) відносно невідомих величин  $Q$ ,  $t_1''$  і  $t_2''$ , можна зробити наближений аналіз теплообмінного апарата.

### Методика розв'язування задач

Задача. Визначити величину поверхні нагріву води з масовою витратою  $G_2 = 0,08 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$  під час прямопливу і протипливу в теплообмінному апараті, якщо необхідно нагріти воду від  $t_2' = 20^\circ \text{C}$  до температури  $t_2'' = 80^\circ \text{C}$ . Нагрів здійснюється димовими газами масова витрата яких  $G_1 = 0,42 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ . Температура димових газів на вході в теплообмінний апарат дорівнює  $t_1' = 160^\circ \text{C}$ . Коефіцієнт теплопередачі в теплообмінному апараті дорівнює  $k = 70 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ , коефіцієнт ефективності теплопередачі  $\eta = 0,98$  і коефіцієнт забруднення  $\varphi = 0,12$ .

З таблиць отримаємо, що теплоємність димових газів дорівнює  $c_{p1} = 1,08 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ , води –  $c_{p2} = 4,175 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ .

Враховуючи рівняння (160) і (161) отримаємо рівність

$$\eta c_{p1} G_1 (t_1' - t_1'') = c_{p2} G_2 (t_2'' - t_2').$$

З цього рівняння отримаємо, що температура димових газів на виході з апарата дорівнює

$$t_1'' = t_1' - \frac{c_{p2} G_2 (t_2'' - t_2')}{\eta c_{p1} G_1}.$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що

$$t_1'' = 160 - \frac{4175 \cdot 0,08 (80 - 20)}{0,98 \cdot 1080 \cdot 0,42} = 115^\circ \text{C}.$$

Середній температурний тиск в теплообмінному апараті під час прямопливу визначається за формулою:

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}},$$

де  $\Delta t' = t_1' - t_2'$  і  $\Delta t'' = t_1'' - t_2''$ . Для нашого випадку  $\Delta t' = 160 - 20 = 140^\circ C$  і  $\Delta t'' = 115 - 80 = 35^\circ C$

Враховуючи значення величин  $\Delta t'$  і  $\Delta t''$  отримаємо, що середній температурний тиск в теплообмінному апараті під час прямопливу дорівнює

$$\Delta t_{cp} = \frac{140 - 35}{\ln \frac{140}{35}} = 75,7^\circ C.$$

Зіставляючи рівняння (160) і (162) отримаємо рівняння для визначення невідомої величини  $F_{заг}$ , тобто

$$\eta c_{p1} G_1 (t_1' - t_1'') = k (1 - \varphi_{забр}) F_{заг} \Delta t_{cp}.$$

Звідки отримаємо, що  $F_{заг} = \frac{\eta c_{p1} G_1 (t_1' - t_1'')}{k (1 - \varphi_{забр}) \Delta t_{cp}}$  або

$$F_{заг} = \frac{0,98 \cdot 1080 \cdot 0,42 (160 - 115)}{70 \cdot (1 - 0,12) \cdot 75,7} = 4,29 \text{ м}^2.$$

Середній температурний тиск в теплообмінному апараті під час протипливу визначається за формулою

$$\Delta t_{cp} = \frac{(t_1' - t_2'') - (t_1'' - t_2')}{\ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}}.$$

Підставляючи значення величин отримаємо, що середній температурний тиск в теплообмінному апараті під час протипливу дорівнює

$$\Delta t_{cp} = \frac{(160 - 80) - (115 - 20)}{\ln \frac{160 - 80}{115 - 20}} = 87,3^\circ C.$$

Враховуючи залежність  $F_{заг} = \frac{\eta c_{p1} G_1 (t_1' - t_1'')}{k (1 - \varphi_{забр}) \Delta t_{cp}}$  отримаємо, що

$$F_{заг} = \frac{0,98 \cdot 1080 \cdot 0,42 (160 - 115)}{70 \cdot (1 - 0,12) \cdot 97,3} = 3,72 \text{ м}^2.$$

## ДОДАТКИ

### Теплофізичні характеристики матеріалів

матеріал	$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$[c_p] = \frac{\text{кДж}}{\text{кгК}}$	$[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{сКм}}$	$[a]10^6 = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$
водень			0,2	
повітря	1,2	1,005	0,025	20,73
вода	1000	4,2	0,6	0,143
азбест листовий	1000-1300	0,82	$0,157+1,86 \cdot 10^{-4} t$	
алюміній	2680	0,894	209	87,2
бетон з гравієм	2400	0,837	1,5	0,747
залізобетон	2200	0,77	1,55	0,915
пінобетон	600	0,837	0,14	0,279
глина	2000	0,837	0,93	0,556
граніт	2800	0,921	2,91	1,13
бронза	8000	0,389	64	20,6
мідь	8950	0,389	393	113
срібло	10400	0,234	410	168,5
сталь	7800	$0,47+2,1 \cdot 10^{-4} t$	$58-0,042 t$	
чавун (С –4%)	7270	0,42	52	17,03
скло звичайне	2500	0,67	0,75	0,448
сухе дерево (сосна)	550	2,8	0,174	0,113
цегла червона	1580	0,84	0,455	0,343
цегла силікатна	1730	0,84	0,79	0,544
цегла пустотіла	1200	0,88	0,44	0,42
цегла вогнетривка	1850	$0,88+2,3 \cdot 10^{-4} t$	$0,835+5,8 \cdot 10^{-4} t$	
штукатурка вапняна	1600	0,837	0,7	0,523
гіпсоплити	1100	0,963	0,35	0,33
свинець	11400	0,13	34,6	23,3
вата мінеральна	200	0,94	0,056	0,298
пінопласт ПС – 1	100	1,34	0,041	0,306
пінополіуретан	240	1,34	0,041	0,127
тирса	250	2,51	$0,07-0,093 t$	0,148
мати зі скловолокна	200	0,837	0,045	0,269
шлакобетон	1800	0,85	0,58	0,379
пісок сухий	1380	0,8	0,35	0,317
пісок вологий (10%)	1380	2,0	0,66	0,239
штукатурка цемент.	1800	0,84	1,1	0,728
вата бавовняна	50		0,058	
поліетилен	950		0,29	
коркові плити	175	1,75	0,041	0,134
сніг втрамбований	400	2,08	0,465	0,559
гума технічна	1600	1,58	0,146	0,058
шлак котельний	1000	0,75	0,204	0,272

### Фізичні параметри сухого повітря під атмосферним тиском

$t^{\circ}C$	$\rho,$ $[\rho]=\frac{\kappa\text{г}}{\text{м}^3}$	$c_p,$ $[c_p]=\frac{\kappa\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}C}$	$\lambda \cdot 10^2,$ $[\lambda]=\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$	$\nu \cdot 10^6,$ $[\nu]=\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$Pr$
-20	1,395	1,009	2,23	12,79	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	13,28	0,707
20	1,205	1,005	2,59	15,06	0,703
40	1,128	1,005	2,75	16,96	0,699
60	1,06	1,005	2,89	18,97	0,696
80	1	1,009	3,04	21,09	0,692
100	0,946	1,009	3,2	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,33	25,45	0,686
140	0,854	1,013	3,48	27,8	0,684
160	0,815	1,017	3,63	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,77	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,92	34,85	0,68
250	0,674	1,038	4,26	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,6	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,89	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,2	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,73	79,38	0,687
600	0,404	1,114	6,2	96,89	0,699
700	0,362	1,135	6,69	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,15	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,61	155,1	0,717
1000	0,277	1,185	8,05	177,1	0,719

### Фізичні параметри димових газів

$t^{\circ}C$	$\rho,$ $[\rho]=\frac{\kappa\text{г}}{\text{м}^3}$	$c_p,$ $[c_p]=\frac{\kappa\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}C}$	$\lambda \cdot 10^2,$ $[\lambda]=\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$	$\nu \cdot 10^6,$ $[\nu]=\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$Pr$
0	1,295	1,043	2,28	12,2	0,72
100	0,95	1,068	3,12	21,54	0,69
200	0,748	1,098	4	32,8	0,67
300	0,617	1,122	4,83	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,68	60,38	0,64
500	0,457	1,185	6,54	76,3	0,63
600	0,405	1,214	7,4	93,61	0,62
700	0,363	1,239	8,25	112,1	0,61
800	0,33	1,264	9,13	131,8	0,6
900	0,301	1,29	9,98	152,1	0,59
1000	0,275	1,306	10,9	173,4	0,58
1100	0,257	1,323	11,75	197,1	0,57
1200	0,24	1,34	12,62	221	0,56

### Фізичні параметри води на лінії насичення

$t^{\circ}C$	$\rho,$ $[\rho] = \frac{кг}{м^3}$	$c_p,$ $[c_p] = \frac{кДж}{кг^{\circ}C}$	$\lambda \cdot 10^2,$ $[\lambda] = \frac{Вт}{мК}$	$\nu \cdot 10^6,$ $[\nu] = \frac{м^2}{с}$	$\beta \cdot 10^4,$ $[\beta] = K^{-1}$	$Pr$
0	999,9	4,212	55,1	1,789	-0,63	13,67
10	999,7	4,191	57,5	1,306	0,7	9,52
20	998,2	4,183	59,9	1,006	1,82	7,02
30	995,7	4,175	61,8	0,805	3,21	5,42
40	992,2	4,174	63,5	0,659	3,87	4,31
50	988,1	4,175	64,8	0,556	4,49	3,54
60	983,2	4,179	65,9	0,478	5,11	2,98
70	977,8	4,187	66,8	0,415	5,7	2,55
80	971,8	4,195	67,5	0,365	6,32	2,21
90	965,3	4,208	68	0,326	6,95	1,95
100	958,4	4,22	68,3	0,295	7,52	1,75

### Ступінь чорноти повного випромінення деяких матеріалів

Матеріал	Температура, $^{\circ}C$	$\varepsilon$
Азбестовий картон	24	0,96
Алюміній шорсткий	20 – 50	0,06 – 0,07
Алюміній полірований	225 – 575	0,090 – 0,057
Вода	0 – 100	0,95 – 0,96
Гума шорстка	24	0,86
Дерево стругане	20	0,9
Залізо оцинковане блискуче	28	0,228
Залізо оцинковане окислене	24	0,276
Латунь окислена	200 – 600	0,61 – 0,59
Мармур полірований	22	0,93
Мідь полірована	80	0,018
Мідь окислена	200 – 600	0,57 – 0,55
Нікель неполірований	20	0,37 – 0,48
Скло гладке	22	0,94
Цегла червона шорстка	20	0,88 – 0,93
Цегла шамотна глазурована	1100	0,75
Цегла шамотна	1200	0,59
Цегла силікатна	1230	0,66
Фарби олійні	100	0,92 – 0,96
Фарби алюмінієві	100	0,27 – 0,67
Штукатурка вапняна	10 – 20	0,91
Толь	20	0,93
Папір	20	0,8 – 0,9
Сніг	0	0,96
Сталь окислена шорстка	40 – 370	0,94 – 0,97
Сталь листовая, шліфована	940 – 1100	0,52 – 0,61
Торф брикетний	20	0,93
Чавун шорсткий	40 – 250	0,95

### Нижча теплота згорання палива

Продукт згорання	Нижча теплота згорання, МДж/кг
Умовне паливо	29,3
Буре вугілля	7 – 8
Камінне вугілля	18 – 30
Антрацит	20,9
Мазут	40
Природний газ	33,4 – 42
Торф сирець	8,3 – 10,5
Торф'яний брикет	17
Сухі дрова	17,6
Нафта	40 – 46

### Температура загорання палива

Паливо	Температура загорання, °С.
Торф	225
Дрова	300
Буре вугілля	300 – 400
Кам'яне вугілля	450 – 500
Антрацит	700 – 750
Мазут	500
Природний горючий газ	700 – 750

### Ступінь чорноти полум'я

Вид полум'я	Ступінь чорноти
Полум'я без свічення	0,3
Полум'я газу та антрациту при шаровому спалюванні без свічення	0,4
Видиме полум'я антрацитного пилу	0,45
Видиме полум'я пісного вугілля	0,6
Видиме полум'я мазуту	0,85
Видиме полум'я бензину	0,96 – 0,99
Полум'я торфу кам'яного вугілля, бурого вугілля та деревини.	0,7

### Температура полум'я під час спалювання палива в паливнику

Паливо	Температура полум'я, °С
Торф, мазут	1000
Деревина, буре вугілля, сира нафта, дизельне паливо, тракторний гас	1100 – 1150
Кам'яне вугілля, каучук та вироби з нього, бензин	1200 – 1250
Антрацит, сірка	1300
Горючі гази	1500
Магній	2000



### Теоретична температура горіння палива

Паливо	$T_a, \text{K}$ , при коефіцієнті надлишку повітря $\alpha$			
	$\alpha=1$	$\alpha=1,3$	$\alpha=1,5$	$\alpha=2$
Антрацит	2450	2115	1925	1570
Донецьке вугілля	2535	2135	1915	1555
Мазут	2395	2010	1850	1535
Природний газ	2300	1940	1760	1460
Дрова з вологістю 30%	2125	1845	1705	1435
Торф	1970	1780	1640	1380

### Температура полум'я факела

Паливо	Температура полум'я
Бензин в резервуарах	1473K
Газонафтовий фонтан	1127 – 1357K
Деревина	1047 – 1147K
Деревина в штабелях пиломатеріалів	1127 – 1317K
Дизельне паливо і нафта в резервуарах	1373K
Гас в резервуарах	1373K
Мазут в резервуарах	1273K
Нафтопродукти в резервуарах	1107 – 1207K
Торф	1027 – 1067K
Етиловий спирт	1147 – 1177K
Гумові вироби	1473K

### Швидкість вигорання $M$ , нижня теплота згорання $Q_n^p$ і об'єм повітря $V_n$ необхідного для повного згорання 1 кг палива.

Горючий матеріал	$M, \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{ год}}$	$Q_n^p, \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$	$V_n, \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}$
Ацетон	156	28800	7,26
Бавовна непресована	15	15700	3,75
Бензин	160 – 200	41870	11,6
Деревина (меблі)	54	13800	4,2
Дизельне паливо	150	41870	11,2
Гас	160	41870	11,36
Книги на дерев'яних полицях	20	13400	4,2
Мазут	126	38700	10,44
Нафта	85	41870	10,8
Органічне скло	58	25000	6,6
Полістирол	52	39000	10
Гума	40	33500	9,97
Етиловий спирт	96 – 120	27200	6,69

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Башкирцев М.П., Бубырь Н.Ф., Минаев Н.А., Ончуков Д.Н. Основы пожарной теплофизики: Учебник для пожарно-техн. училищ. – М.: Стройиздат, 1984. – 200с.: ил.
2. Величко Л.Д., Лозинський Р.Я., Семерак М.М. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі: навчальний посібник. – Львів: Вид-во «СПОЛОМ», 2011. – 504с; іл.;табл.
3. Драганов Б.Х., Бессараб О.С., Долінський А.А., Лазаренко В.О., Міщенко А.В., Шеліманова О.В. Теплотехніка. – Київ.: Фірма «Інкос», 2005. – 400 с.: іл.
- 4 Кошмаров Ю.А. Теплотехника: учебник для вузов. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2006. – 501 с.: ил.
5. Котов Г.В. Прикладная термодинамика. – Минск.: КИИ МЧС РБ, 2004. – 422 с.: ил.

# ЗМІСТ

Вступ.....	3
<b>Частина II. Теплопередача</b>	
<b>Тема 1. Основні положення.....</b>	<b>4</b>
Коефіцієнт теплопровідності.....	6
Рівняння теплопровідності Фур'є .....	7
Початкова та граничні умови .....	9
<b>Тема 2. Стаціонарне температурне поле в одношарових тілах .....</b>	<b>10</b>
Температурне поле в плоскій однорідній стінці .....	10
Температурне поле в циліндричній однорідній стінці .....	13
Температурне поле в сферичній однорідній стінці .....	15
Методика розв'язування задач.....	17
<b>Тема 3. Стаціонарне температурне поле в багатошарових тілах .....</b>	<b>22</b>
Температурне поле плоскої багатошарової стінки за наявності ідеального теплового контакту між шарами .....	22
Температурне поле в багатошаровій циліндричній стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами .....	27
Теплова ізоляція труб. Критичний радіус ізоляції .....	31
Температурне поле в багатошаровій сферичній стінці за наявності ідеального теплового контакту між шарами .....	32
Методика розв'язування задач.....	37
<b>Тема 4. Нестационарна теплопровідність .....</b>	<b>50</b>
Опис контакту тіл з навколишнім середовищем .....	52
<b>Тема 5. Конвекційний теплообмін .....</b>	<b>53</b>
Диференціальне рівняння тепловіддачі .....	53
Теорія подібності .....	55
Числа подібності .....	55
Визначення коефіцієнта теплообміну .....	57
Методика розв'язування задач.....	60
<b>Тема 6. Променевий теплообмін .....</b>	<b>64</b>
Закони випромінювання абсолютно чорного тіла .....	67
Закон Кірхгофа .....	69
Теплообмін випромінюванням між плоскими паралельними стінками, відокремленими діатермічним середовищем .....	70
Теплообмін випромінюванням між твердими тілами, одне з яких розміщене всередині іншого .....	72
Теплові екрани .....	73
Методика розв'язування задач.....	74
<b>Тема 7. Види палива. Головні стадії горіння. Основні положення .....</b>	<b>78</b>
Головні стадії горіння палива .....	80
Кількість повітря необхідного для згорання палива .....	81
Випромінювання полум'я факела .....	82
Випромінювання полум'я факела в п .....	83
Випромінювання полум'я факела на пожежі .....	84
Методика розв'язування задач.....	86

<b>Тема 8. Температурний режим під час пожежі в приміщенні .....</b>	<b>87</b>
Рівняння пожежі .....	89
Температурний режим під час пожежі в приміщенні .....	91
Температурний режим під час пожежі в житлових та громадських спорудах .....	92
<b>Тема 9. Теплообмінні апарати .....</b>	<b>93</b>
Вступ. Основні положення .....	93
Основні рівняння теплового розрахунку теплообмінних апаратів .....	96
<i>Методика розв'язування задач</i> .....	99
<b>Додатки .....</b>	<b>101</b>
<b>Список літератури.....</b>	<b>106</b>

**Для нотаток**

## Для нотаток

**Для нотаток**

*Навчальне видання*

**Л о з и н с ь к и й Роман Якович**

**Т Е П Л О Ф І З И К А  
ТА ПОЖЕЖНА БЕЗПЕКА**

**Частина II. Теплопередача**

*Навчальний посібник*

Літературний редактор: Галина Падик

Комп'ютерна верстка: Олександр Потапенко

Друк на різнографі: Маріанна Климус

Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman.  
Друк на різнографі. Ум. др. арк. 5,58. Зам № 886/17-04.  
Папір офсетний. Наклад: 100.

Друк ЛДУБЖД  
70007, Україна, м. Львів, вул. Клепарівська, 35.  
Тел./факс: (233-00-88), тел.моб. (067) 352-09-59