ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

X Всеукраїнської науково-практичної конференції курсантів та студентів

МАТЕМАТИКА, ЩО НАС ОТОЧУЄ: МИНУЛЕ, СУЧАСНЕ, МАЙБУТНЄ

Львів 2023

ОРГАНІЗАТОР ТА ВИДАВЕЦЬ	Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:	ЛДУ БЖД, вул. Клепарівська, 35 м. Львів, 79007
контактні телефони:	(032)233-24-79 тел/факс 2330088

Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє:
Зб. наук.праць X Всеукраїнської конф. курсантів та студентів. – Львів: ЛДУ БЖД, 2023 -158с

Збірник сформовано за матеріалами X Всеукраїнської конференці курсантів та студентів **«Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє».**

Збірник містить матеріали таких тематичних секцій:

- Математичні відкриття, що змінили світ
- Прикладні задачі в математиці
- Історія математики
- Математика і сучасність
- Постаті в математиці

Здано в набір 20.05.2023. Підписано до друку 25.05.2023. Формат 60х841/3. Папір офсетний. Ум. друк. арк. 7. Гарнітура Times New Roman. Друк на різографі. Наклад: 100 прим. Друк: ЛДУ БЖД вул. Клепарівська, 35, м. Львів, 79007. ldubzh.lviv@mns.gov.ua	За точність наведених фактів, економікостатистичних та інших даних, а також за використання відомостей, що не рекомендовані до відкритої публікації, відповідальність несуть автори опублікованих матеріалів. При передруковуванні матеріалів посилання на збірник обов‘язкове.

СЕКЦІЯ 1. Прикладні задачі в математиці

В.Д. Бережной
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
Науковий керівник ***Г.Я. Тулученко****, доктор технічних наук, професор*

ВПЛИВ МЕТОДІВ НАБЛИЖЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ НА ТОЧНІСТЬ АПРОКСИМАЦІЇ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Як відомо, в разі неможливості аналітичного обчислення невласного інтеграла в прямому перетворенні Лапласа:

$$L\big(f(t)\big)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{1}$$

залучають наближені методи інтегрування.

Наприклад, застосування заміни:

$$t=-\ln(u), \tag{2}$$

зводить інтеграл виду (1) до інтеграла зі скінченними межами:

$$L\big(f(t)\big)=\int_0^{1} u^{p-1} f\big(-\ln(u)\big)du\,. \tag{3}$$

Для наближеного обчислення інтегралів виду (3) можна застосовувати низку відомих методів, зокрема: складену формулу Сімпсона, формулу Гаусса-Лежандра, формулу Гаусса-Чебишова та інші. З іншого боку, для інтегралів виду (1) можливою є безпосередня побудова квадратурної формули гауссового типу з многочленами Лагерра [1].

Виконаємо порівняльний аналіз точності апроксимації функції-зображення при застосуванні наближених методів інтегрування в перетворенні Лапласа. За тестову функцію оберемо функцію:

$$f(t)=e^{\alpha t}\sin(\omega t), \tag{4}$$

яка в залежності від значень параметрів α і ω моделює різні види коливань.

Для порівняння власних результатів з відомими [2] візьмемо: $\alpha=-0{,}2$, $\omega=1$.

У роботі [2] для наближеного обчислення інтеграла (3) з функцією (4) застосовують складену формулу Сімпсона.

$$L\big(f(t)\big)\approx\frac{1}{3n}\Big(\lim_{u\to 0} u^{p-1} f(-\ln u)+2\sum_{j=1}^{n/2-1} u_{2j}^{p-1} f\big(-\ln u_{2j}\big)+$$

$$+4\sum_{j=1}^{n/2} u_{2j-1}^{p-1} f\left(-\ln u_{2j-1}\right) + \lim_{u \to 1} u^{p-1} f\left(-\ln u\right)\Bigg), \qquad (5)$$

де $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $h = 1/n$, $u_j = jh$, $j \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$.

Спираючись на обмеження швидкості зростання функції $f(t)$, при яких перетворення Лапласа існує, можна показати, що в формулі (5) $\lim_{u \to 0} u^{p-1} f(-\ln u) = 0$.

Для обчислення доданка $\lim_{u \to 1} u^{p-1} f(-\ln u) = \lim_{t \to 0} f(t)$ автори роботи [2] використовують елементи методу обрізання границь, але без коректного оцінювання збереженої точності обчислень.

Побудуємо інші складені квадратурні формули для обчислення інтеграла (3):

$$\int_0^1 u^{p-1} f\left(-\ln(u)\right) du \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^{Q} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\, g\left(u_{i,j}^{*}\right),$$

де $u_{i,j}^{*} = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{2} z_j + \dfrac{u_i + u_{i-1}}{2}$, z_j – корінь многочлена Лежандра або Чебишова степеня *N* на відрізку $[-1,1]$, $j = \overline{1,N}$; $c_{i,j}$ – вагові коефіцієнти, що обчислюються за відповідними формулами: $c_{i,j} = \dfrac{2}{\left(1 - z_{i,j}\right)^2 \left(P_N^{/}\left(z_{i,j}\right)\right)^2}$ – при використанні многочленів Лежандра $P_N(z)$ степеня *N*, $c_{i,j} = \pi / N$ – при використанні многочленів Чебишова степеня *N*; функція $g(u)$ з точністю до сталого множника є добутком функції $u^{p-1} f(-\ln u)$ та функції $1/\rho(u)$, що утворюється з вагового множника, з яким відповідна система многочленів ортогональна на відрізку $[-1,1]$, *Q* – кількість відрізків розбиття $\left[u_{i-1}, u_i\right]$ відрізка $[0,1]$.

Квадратурна формула Гаусса-Лагерра має вигляд:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \approx \sum_{j=1}^{N} c_j\, g\left(t_j\right),$$

де $c_j = \dfrac{t_j}{(N+1)^2 L_{N+1}^2\left(t_j\right)}$, t_j – корінь многочлена Лагерра $L_N(t)$ степеня *N*; $g\left(t_j\right) = f\left(t_j\right) e^{(1-p)t_j}$.

Для практичного використання можна рекомендувати квадратурну формулу Гаусса-Лагерра, як таку, що забезпечує найкращу точність в середньому квадратичному.

Література

1. Голубєва К. М., Денисов С. В., Кашпур О. Ф., Клюшин Д. А., Риженко А. І. Чисельні методи інтегрування (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики): Методичні розробки. Київ: «Видавництво Людмила», 2019. С. 36–46.
2. Krougly Zinovi, Davison Matt, Aiyar Sid. (2017). The Role of High Precision Arithmetic in Calculating Numerical Laplace and Inverse Laplace Transforms. *Applied Mathematics*. 8, 562–589. URL: http://www.scirp.org/journal/am

О.С. Літвіненко, О.С. Осауленко
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник ***Н.Б. Сокульська,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ДЕФОРМАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗАКРИТИХ ФОРТИФІКАЦІЙНИХ СПОРУД ПРИ ВИБУХАХ

Численні аварії на складах озброєння та військової техніки в Україні протягом її незалежності вказали на сильну незахищеність таких об’єктів, адже згадані озброєння та техніка в основному зберігалися за так званих важких умов – на відкритих полігонах. Тому керівництвом держави та Міністерства оборони України були визначені пріоритети щодо будівництва захищених залізобетонних сховищ [1, 2] для укриття різних типів боєприпасів, адже пожежа на танковому складі у Криворізькій області у 2014 році не спричинила значної шкоди, бо техніка зберігалась в боксах, які завадили розповсюдженню вогню, зменшивши та стримавши ударні хвилі від вибухів та детонації боєкомплекту.

Як відомо [3], поєднання бетону й сталевої арматури, в якому обидва елементи «працюють» спільно: бетон сприймає зусилля на стиск, а сталь – на розтягнення, володіють однаковим коефіцієнтом лінійного розширення (тобто однаково видовжуються при нагріванні і стискаються при охолодженні), а тому залізобетонні конструкції доволі ефективно «гасять» наслідки вибухів.

Та внаслідок вибухів під впливом вибухових хвиль, які поширюються у вигляді ударних хвиль або хвиль стиску, залізобетонні споруди поводяться як пружні коливальні системи, адже дію ударної хвилі можна розглядати як рівномірно розподілене динамічне навантаження. Ступінь пошкодження таких конструкцій визначається або надлишковим тиском, або швидкісним натиском. Для конструкцій, що можуть опинитись у фронті вибухової хвилі та отримати короткочасні динамічні навантаження, останні розраховуються за граничними станами. Для опису ж поведінки арматури в залізобетонній конструкції часто використовують модель Купера-Саймонса, яка дозволяє врахувати коефіцієнти швидкості деформації при різних умовах вибухового навантаження [3]:

$$\sigma_T = \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{C}\right)^{1/p}\right]\left(\sigma_0 + \beta E_p \varepsilon_{eff}^p\right); \; E_p = E_{tg} E / \left(E - E_{tg}\right); \; \varepsilon_{eff}^p = \int_0^t \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right)^{1/2} dt,$$

де p і C – параметри швидкості деформацій; $\dot{\varepsilon}$ – швидкість деформацій; σ_0, σ_T – статична та динамічна границя текучості; E – модуль пружності; E_{tg} - модуль зміцнення.

Разом з механічними змінами, які відбуваються в армуванні залізобетонних конструкцій важливими є й властивості самого бетону, адже його кількість, розмір та відстань «розльоту» прямо залежить від розміру, щільності, розташування арматури і впливає на ступінь ураження навколишніх об’єктів.

Дані по об’єму зруйнованого бетону [4], для різних варіантів армування на поверхні на різних відстанях від останньої, формують уявлення, що найбільш стійкою до дії вибуху є плита з подвійними шарами армування. Найменш стійкою є плита без армування. При цьому, при контактному підриві ВР, плита з верхнім шаром армування є більш стійкою до дії вибуху. При віддалені заряду ВР плита з нижнім шаром армування є кращою порівняно з плитою із верхнім шаром армування. Характер руйнування залізобетонної плити при дії вибухового навантаження показує, що її крізного руйнування не відбувається у випадку наявності одного чи двох шарів арматури.

Зважаючи на особливості деформування залізобетонних конструкцій встановлено, що схеми їх армування впливають на кількості зруйнованого бетону в плиті Так процеси моделювання вказують, що наявність двох армуючих шарів в залізобетонній плиті призводить до зменшення кількості зруйнованого бетону до 3 разів. Зважаючи на це, доцільно припустити, що зв’язування армуючих шарів між собою (поперечна арматура) може призвести до зростання його цілісності при дії вибухового навантаження.

Література

1. Про додаткові заходи щодо покращення стану зберігання ракет, боєприпасів та продуктів їх утилізації на арсеналах, базах та складах Збройних Сил України: Указ Президента України від 04.11.2019 р. № 799/2019. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/799/2019#Text.
2. Про Програму забезпечення живучості та вибухопожежобезпеки арсеналів, баз і складів озброєння, ракет і боєприпасів Збройних Сил України на 1995 - 2015 роки: Постанова Кабінету Міністрів України від 28.06.1995 р. N 472 (поточна редакція від 09.10.2013р.) URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/472-95-%D0%BF#Text.
3. Васильченко О.В. Будівельні конструкції та їх поведінка в умовах надзвичайних ситуацій: Навчальний посібник / О.В. Васильченко, Ю.В. Квітковський, О.В. Миргород, О.А. Стельмах. – Харків: ХНАДУ, 2015. – 488.
4. Попов Г.И. Железобетонные конструкции, подверженные действию импульсных нагрузок. – М.: Стройиздат, 1986. – 128 с.

О.В. Стрілець
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Н.М. Гузик****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ЙМОВІРНІСНІ МЕТОДИ У ЗАДАЧАХ УРАЖЕННЯ ЦІЛІ

Теорія ймовірностей – один із розділів вищої математики, який не тільки дає знання, які допомагають розуміти закономірності навколишнього світу, але і знаходить практичне використання в повсякденному житті. Сьогодні методи теорії ймовірностей широко застосовуються в теорії надійності, теорії масового обслуговування, теорії похибок спостереження, теорії автоматичного управління, при плануванні та організації виробництва, аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції тощо. Ймовірнісні методи є базовими для теорії ухвалення рішень, саме тому вони широко застосовуються і при розв’язанні практичних завдань із різних питань підвищення бойової ефективності артилерії.

Ймовірність події можна визначити статистичним чи аналітичним шляхом. Аналітичним шляхом ймовірність події можна визначити:

- способом безпосереднього підрахунку;
- за допомогою геометричних побудов;
- на основі теорем теорії ймовірності;
- використовуючи закони розподілів випадкових величин.

Спосіб безпосереднього підрахунку використовується тоді, коли можна застосувати класичне означення ймовірності, тобто заздалегідь порахувати скільки є способів, що сприяють появі даної події з числа всіх можливих подій.

Задача 1. Ракетний комплекс веде стрільбу по трьох цілях чотирма ракетами. Вважається, що кожна ракета вибирає навмання одну з цілей, а вибравши її, може влучити або схибити з однаковою ймовірністю. Знайти ймовірність того, що всі ракети влучать в одну ціль.

Розв’язання. Елементарна подія – результат під час стрільби з ракети (промах або одна з трьох цілей). Оскільки комплекс складається з чотирьох ракет, то число всіх можливих подій $n = 4^4 = 256$. Кількість подій, що сприяють події A (всі ракети влучать в одну ціль), рівна $m = 3$. Тоді $p(A) = \frac{3}{256}$.

Спосіб визначення ймовірності за допомогою геометричних побудов використовують, коли не можна підрахувати число елементарних подій, що сприяють появі конкретної події, чи кількість всіх елементарних подій, але можна встановити деякі геометричні величини, що відповідають умовам появи події, що розглядається (кут, довжина, площа, об’єм і т.д.).

Задача 2. Нехай при стрільбі по цілі снаряди розсіюються рівномірно на площині, яка має форму прямокутника довжиною 20 м та шириною 100 м. Визначити ймовірність влучання в ціль при одному пострілі, якщо ціль знаходиться в межах площини розсіювання снарядів, а її розміри 4 м та 50 м.

Розв'язання. У цьому випадку неможливо підрахувати число подій, що сприяють елементарній події – влучання в ціль, до всеможливого числа подій, однак ймовірність можна обчислити за формулою $p(A)=\frac{s_1}{s_2}=\frac{4\cdot 50}{20\cdot 100}=0{,}1,$ в якій s_1 – площа цілі, s_2 – площа, в яку можуть влучити снаряди.

При застосуванні третього підходу використовують теореми додавання та множення ймовірностей, теореми про умовну ймовірність, формули повної ймовірності, Байєса, Бернуллі тощо.

Задача 3. Відомо, що ймовірність влучання при одному пострілі в корпус танка $P_k=0{,}6$, в його башню – $P_b=0{,}3$, в ходову частину – $P_x=0{,}1$. Ймовірність виходу із ладу танка відповідно рівні: при влучанні в корпус $p_k=0{,}8$, в башню – $p_b=0{,}5$, в ходову частину – $p_x=0{,}9$. Визначити ймовірність виходу з ладу танка при одному пострілі.

Розв'язання. За формулою повної ймовірності

$$P=P_k\cdot p_k+P_b\cdot p_b+P_x\cdot p_x=0{,}6\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}72.$$

Це можна протрактувати так: при великому числі подібних стрільб в 72 випадках із 100 танк противника буде знищений.

Задача 4. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі рівна 0,7 і залишається постійною при кожному пострілі. Зроблено 10 пострілів. Знайти найймовірнішу кількість влучань та ймовірність, що їй відповідає.

Розв'язання. Найймовірніше число влучень k обчислюється за формулою $np-q\le k\le np+p$, тому $10\cdot 0{,}7-0{,}3\le k\le 10\cdot 0{,}7-0{,}3$. Звідси $k=7$. За формулою Бернуллі $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, знаходимо $P_{10}(7)=C_{10}^7 0{,}7^7 0{,}3^3=0{,}27.$

Одним із розподілів, що найчастіше використовується в артилерійських розрахунках є нормальний закон розподілу, адже розсіювання снарядів відбувається саме за цим законом.

Задача 5. По автостраді, яка має вигляд смуги шириною 20 м, ведеться обстріл в напрямку, перпендикулярному автостраді. Прицілювання відбувається по середній лінії автостради. Середнє квадратичне відхилення в напрямку обстрілу дорівнює $\sigma=8$ м. Робиться систематична помилка в напрямку обстрілу: снаряди не долітають 3 м. Знайти ймовірність влучення в автостраду при одному пострілі.

Розв'язання. Виберемо початок координат в довільній точці на середній лінії автостради і спрямуємо вісь абсцис перпендикулярно автостраді. Влучання або невлучання снаряда в автостраду визначається значенням тільки однієї змінної. Випадкова величина X – координата точки падіння снаряду – розподілена за нормальним законом з параметрами $m=-3$, $\sigma=8$. Влучання снаряда в автостраду відповідає попаданню випадкової величини X в інтервал $(-10;10)$. Тоді $P(-10<X<10)=\Phi\left(\frac{10-3}{8}\right)-\Phi\left(\frac{-10-3}{8}\right),$ звідки, застосовуючи таблицю значень функції Лапласа, знаходимо $P(-10<X<10)=0{,}4477+0{,}3083=0{,}756.$

Розв'язання подібних задач є важливим при підготовці даних для стрільби, оскільки сприяє захопленню вогневої переваги над противником.

А.О. Шевчук
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного
*Науковий керівник **Х.І. Ліщинська**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ ВІЙСЬКОВО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення, адже їх часто використовують для розв’язування задач у різних галузях науки, зокрема і військової. Перебіг різноманітних процесів та явищ у навколишньому світі описується функціями, аналітичний вигляд яких необхідно визначити. Здійснити це можна створивши математичну модель, яка часто є диференціальним рівнянням. Диференціальне рівняння, отримане у процесі дослідження деякого реального процесу, називають його диференціальною моделлю. Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їх станів, з їх використанням можна описати механізм розвитку процесу а також передбачити його подальший розвиток без проведення спеціальних експериментів.

Проте часто сам процес побудови диференціальної моделі є складною математичною задачею, зокрема диференціальне рівняння, яке описує певний процес, повинно, по можливості, бути приведеним до рівняння відомого вигляду: лінійного, однорідного тощо. Це вимагає введення різних спрощень. При цьому все ж необхідно врахувати всі основні фактори, що впливають на процес.

Розглянемо деякі задачі військово-прикладного характеру, які розв’язуються за допомогою диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклад 1. Винищувач пікірує з горизонтального польоту. Потрібно визначити закон зміни довжини шляху, який пройде літак, в залежності від швидкості пікірування по вертикальній складовій. Опір повітря вважати пропорційним квадрату швидкості.

Розв’язання. Нехай H – це пройдений літаком шлях по вертикалі за час t. На літак при пікіруванні діють такі сили: тяжіння і опору повітря, значення яких відповідно рівні $P = mg$ та $-kV_H^{\,2}$. На підставі другого закону Ньютона отримаємо диференціальне рівняння $m\dfrac{dV_H}{dt} = mg - kV_H^{\,2}$. В рівнянні потрібно встановити зв'язок між швидкістю V_H і пройденим по вертикалі шляхом H, тоді можна записати $\dfrac{dV_H}{dt} = \dfrac{dV_H}{dH}\cdot\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{dV_H}{dH}\cdot V_H$. Отримаємо $m\dfrac{dV_H}{dH}\cdot V_H = mg - kV_H^{\,2}$ або $\dfrac{mV_H dV_H}{mg - kV_H^{\,2}} = dH$, звідки $H = -\dfrac{m}{2k}\ln C\left(mg - kV_H^{\,2}\right)$. Значення C знайдемо з урахуванням початкових умов: при $t=0$ $H=0$, $V_H=0$. Звідки $\frac{m}{2k}\ln Cmg=0$, $Cmg=1$ і $C=\frac{1}{mg}$. Підставивши C в загальний розв'язок, знайдемо $H=-\frac{m}{2k}\ln\left(1-\frac{kV_H{}^2}{mg}\right)$. Отримали формулу для визначення довжини шляху, який пройде літак, в залежності від швидкості пікірування по вертикальній складовій.

Приклад 2. Літак-винищувач, що знаходиться в певний момент часу в точці B, переслідує літак-ціль, що знаходиться в точці A. Швидкість цілі і винищувача відповідно рівні $V_ц$ і $V_в$ $(V_ц<V_в)$. Необхідно визначити траєкторію польоту винищувача в горизонтальній площині від точки B, щоб виявити ціль, якщо від точки A ціль летить прямолінійно, але за невідомим курсом.

Розв'язання. Нехай ціль летить з точки A в точку B, тоді час її польоту буде рівним $t={\rho_0}/{V_ц}$, де ρ_0 – відстань від точки A до точки B. За цей час винищувач повинен прибути в точку B. Якщо в точці B ціль не буде виявлена, тобто вона слідує не по прямій AB, винищувач слідує з точки B по якійсь кривій. Нехай точка M, що належить цій криві, є точкою передбачуваної зустрічі. Шляхи, які пройшли ціль і винищувач, знайдемо відповідно за формулами: $S_ц=V_ц t$, $S_в=V_в\left(t-\frac{\rho_0}{V_ц}\right)$. Виразивши t з першої формули і підставивши її значення в другу, отримаємо $S_в=\frac{V_в}{V_ц}\left(S_ц-\rho_0\right)$. Нехай точка M має полярні координати (ρ,φ), в системі координат з початком координат у точці A. Тоді $S_ц=\rho$, $S_в=S_в(\varphi)=S(\varphi)=\frac{V_в}{V_ц}(\rho-\rho_0)$. Диференціюючи по φ знайдемо $\frac{dS}{d\varphi}=\frac{V_в}{V_ц}\frac{d\rho}{d\varphi}$.

Використовуючи формулу $dS=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}d\varphi$, отримаємо рівність $\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}=\frac{V_в}{V_ц}\frac{d\rho}{d\varphi}$. Після нескладних перетворень перейдемо до диференціального рівня $\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{\rho}{\sqrt{\left({V_в}/{V_ц}\right)^2-1}}$. Прийнявши $k=\frac{1}{\sqrt{\left({V_в}/{V_ц}\right)^2-1}}$, будемо мати $\frac{d\rho}{d\varphi}=k\rho$. Розв'язком рівняння з розділеними змінними $\frac{d\rho}{\rho}=kd\varphi$

буде сімейство функцій $\ln\rho = k\varphi + \ln C$ або $\rho = Ce^{k\varphi}$. Враховуючи початкові умови при $\varphi = 0$, $\rho = \rho_0$, знайдемо $\rho_0 = C$. Тоді $\rho = \rho_0 e^{k\varphi}$. Отримали рівняння логарифмічної спіралі, по якій повинен летіти винищувач, щоб виявити ціль.

Отже, диференціальні рівняння, зокрема першого порядку, широко застосовуються при розв'язуванні задач з військовою тематикою.

А. С. Загорський
Національна академія сухопутних військ
Науковий керівник ***Л. Д. Величко****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

МЕТОДИ ВІДНОВЛЕННЯ ДЕТАЛЕЙ

У збройних силах використовуються сотні тисяч одиниць військової техніки. Їх використання, як у мирному житті так і у воєнних конфліктах, супроводжується поломками окремих деталей так і цілих вузлів механізмів. Утворення та розвиток несправностей в машинах пояснюється, як дією об'єктивно існуючих закономірностей так і результатом ураження техніки вибуховими речовинами.

У мирному житті несправності в механізмах з'являються внаслідок сталого або раптового зниження фізико-механічних властивостей матеріалу деталей, їх стирання, деформування, зминання, корозії, старіння, перерозподілу залишкових напружень та інших причин, які викликають руйнування деталей.

Під час військових дій поява несправностей в механізмах появляється внаслідок силового впливу вибухової речовини на деталі та вузли механізму. У більшості випадків відбуваються руйнація з’єднань, неконтрольована зміна заданих просвітів у рухомих з'єднаннях, пошкодження окремих деталей та цілих вузлів.

Тріщини утворюються внаслідок впливу значних місцевих навантажень, ударів та перенавантажень. Вони можуть з'являтися в найбільш навантажених місцях рам, блоків, корпусів коробок передач задніх мостів та інших корпусних деталей різних механізмів.

Пробоїни з'являються в результаті ударів різних предметів по поверхні тонкостінних та товстостінних деталей. До таких пошкодженням відносяться пробоїни в бортах танків та бронетранспортерів, на стінках блоку циліндрів, крилах, капотах та корпусах коробок передач та редукторів.

Поломки та обломи виникають при великих ударних навантаженнях на деталі. Найчастіше вони спостерігаються на деталях виготовлених литтям.

У виробництві розроблено значну кількість методик відновлення деталей. Вибір найкращої методики базується на одночасному врахуванні технічних, економічних і організаційних можливостей.

Технологічні процеси зварювання та наплавлення займають провідне місце при ремонті виробів, оскільки з їх допомогою відновлюють майже70% всіх деталей.

Велика різноманітність форм та розмірів деталей обумовлює необхідність застосування в ремонтному виробництві різних видів зварювання.

Ручне дугове зварювання виконують, як правило, металевими електродами при живленні дуги постійним або змінним струмом.

Під час відновлення деталей дуговим зварюванням виникають такі небажані наслідки: окислюється метал, поглинається азот, вигоряють легуючі добавки, відбуваються об'ємні та структурні перетворення, що призводить до викривлення деталей, порушення геометричних розмірів деталей внаслідок його термічної обробки, зміна твердості металу.

Окислення металу знижує механічні властивості та пластичність наплавлених чи зварених ділянок.

Поглинання азоту за рахунок утворення нітриду заліза, марганцю та інших елементів збільшує міцність зварного шва, проте різко зменшує його пластичність.

Для зменшення негативного впливу розглянутих явищ на відновлюваних деталях зварюванням або наплавленням використовують електроди з обмазкою.

Газове зварювання та наплавлення здійснюють, як правило, ацетиленокисневим нейтральним полум'ям. В окремих випадках застосовують відновлюване полум'я, а при різанні металів – окисне полум'я.

Щоб не допустити зміни положення зварювальних деталей і просвіту між кромками, впродовж усього процесу зварювання, виріб закріплюють з допомогою певних механізмів або за допомогою прихоплення. Довжина прихоплень, їх кількість та відстань між ними залежать від товщини металу, довжини і конфігурації шва, що зварюється. Після зварювання рекомендується проковування металу шва в гарячому стані та подальшу його нормалізацію за нормальної температури 800—900 °С. Після цього метал набуває достатньої пластичності і дрібнозернистої структуру.

Гаряче зварювання чавуну – операція, при якій деталь нагрівають (у печі або іншим способом) до температури 650-680 °С. Під час зварювання температуру деталі підтримують не нижче 500 °С, що затримує охолодження зварювальної ванни і тим самим сприяє утриманню великого обсягу металу у ванні в рідкому стані.

Найкращі результати при гарячому зварюванні чавуну дає ацетиленокисневе полум'я з присадним матеріалом із чавуну. Під час зварювання деталь не повинна охолоджуватись нижче за 500 °С. Якщо це сталося, то деталь знову підігрівають до 650-680 °С. Після закінчення зварювально-наплавочних робіт для зняття залишкових напружень деталі її знову підігрівають до 650-680 °С, а потім повільно охолоджують у спеціальній шахті-термосі або разом із піччю.

Газове зварювання чавуну кольоровими сплавами без підігріву деталі в поєднанні з дуговим зварюванням широко застосовують у ремонтному виробництві для зварювання тріщин на оброблюваних поверхнях корпусних деталей. Присадочним матеріалом для газового зварювання є латунь, яка більш відповідає вимогам зварювання по порівнянню з іншими кольоровими металами на мідній основі. Температура плавлення латуні нижче температури плавлення чавуну (880-950 ° С), тому її можна застосувати для зварювання, не доводячи чавун до плавлення і не викликаючи у ньому особливих структурних змін та внутрішніх напружень.

Література

1. Молодык Н.В., Зенкин А.С. Восстановление деталей машин. Справочник. – М.: Машиностроение, 1989. – 480 с.% ил.

Ю.А. Сухорука
Львівський національний університет природокористування
Науковий керівник ***Л.Я. Шпак****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

АНІМАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ В ПАКЕТІ MAPLE

Параметрично задані криві ефективно використовуються в механіці, фізиці, в комп'ютерній графіці.

Процедура анімації в пакеті MAPLE [1] дозволяє наглядно змоделювати процес побудови плоских та просторових гладких кривих і поверхонь.

Лінія розглядається як геометричне місце послідовних положень рухомої точки, координати якої є функціями допоміжної змінної параметру $\boldsymbol{t}$ (часу). Параметрично задана крива в просторі описується рівняннями:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

В пакеті Maple було створено програму, що при випадковому виборі опорних точок будує криві Без'є на площині та в просторі.

Для побудови кривої Без'є фіксуються контрольні точки P_k., що належать контурним лініям. Крива міститься в випуклій оболонці зафіксованих точок, проте містить лише першу та останню з них. Координати точок на кривій визначаємо з параметричного рівняння кривої:

$x=\sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k\cdot(1-t)^{m-k}t^k x_k$; $y=\sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k\cdot(1-t)^{m-k}t^k y_k$; $z=\sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k\cdot(1-t)^{m-k}t^k z_k$ де значення параметра t в інтервалі [0,1], крайні значення якого є початком і кінцем кривої. Тут $m+1$ - кількість фіксованих точок на напрямній лінії, координати яких P_k (x_k; y_k; z_k), (x; y; z) - координати точок на кривій Без'є, C_m^k- біноміальні коефіцієнти.

Запропоновані програми анімації наочно ілюструють алгоритм де Кастельє при побудові кривих Без'є у випадку трьох та чотирьох опорних точок (рис.1,2).

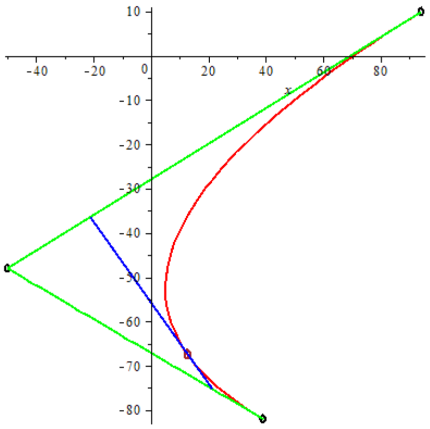


Рис.1.

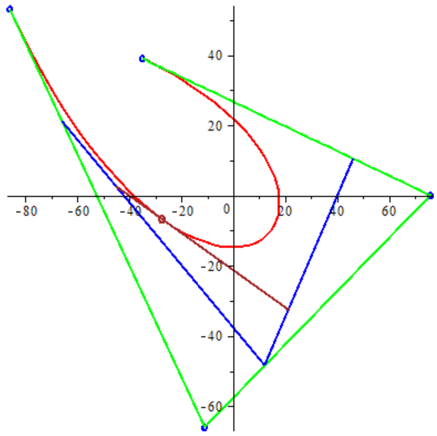


Рис.2.

Пропонуються програми просторового моделювання поверхонь. Зокрема, ілюстрація побудови перерізів куба площиною та анімація на основі рівняння сфери (рис.3,4).

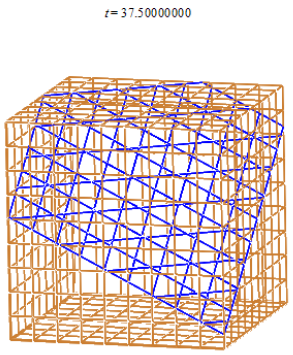


Рис.3.

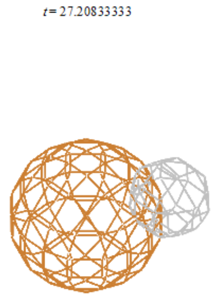


Рис.4.

Активне залучення сучасних пакетів моделювання та візуалізації сприяє поглибленню та розширенню знань із програмного курсу вищої математики, розвиває вміння аналізувати, абстрактно та творчо мислити.

Література

1. Попов Б.О. Розв’язування математичних задач у системі комп’ютерної алгебри Maple V. Київ: VIP, 2001. – 312 с.

Д. Шаповал
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Л.Ф. Дзюба,*** *доктор технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ФАЗОВІ ТРАЄКТОРІЇ ЛІНІЙНОЇ КОНСЕРВАТИВНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Метод фазової площини застосовують для дослідження динамічних систем з одним степенем вільності. Ідею методу розглянемо на прикладі лінійної динамічної системи. Фазовою називають площину змінних: переміщення системи x та швидкість зміни стану системи $\dot{x}$. На фазовій площині миттєвому стану динамічної системи, що характеризується величинами x та $\dot{x}$, відповідає одна точка, яку називають *фазовою* точкою.

Траєкторія руху фазової точки (графік залежності швидкості від переміщення) називають *фазовою траєкторією.* Вона характеризує процес руху динамічної системи. Сімейство фазових траєкторій (фазова діаграма) дозволяє побачити відразу всю сукупність рухів динамічної системи, що залежать та не залежать від початкових умов.

Для побудови фазових траєкторій потрібно знайти загальний розв'язок диференціального рівняння стану динамічної системи $x = x(t)$ та визначити $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Сукупність залежностей $x = x(t)$ та $\dot{x} = \dot{x}(t)$ визначає рівняння фазової траєкторії в параметричній формі, де параметром є час t. Або рівняння фазової траєкторії можна отримати безпосередньо через інтегральні криві для залежності $x = f(\dot{x})$. Тоді диференціальне рівняння руху другого порядку для автономної динамічної системи з одним ступенем вільності заміняють двома диференціальними рівняннями першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, \dot{x})\,;\ \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = Q(x, \dot{x})\,. \tag{1}$$

Виключивши з рівнянь (1) час, отримаємо одне диференціальне рівняння інтегральних кривих – фазових траєкторій

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{Q(x, \dot{x})}{P(x, \dot{x})}\,. \tag{2}$$

Якщо функції P, Q диференційовані та водночас не перетворюються в нуль у точці $(x,\, \dot{x})$, цю точку називають *регулярною* та через неї проходить єдина фазова траєкторія.

Точку $(x_0,\, \dot{x}_0)$ називають *особливою* точкою фазової траєкторії, якщо у ній $P(x_0,\, \dot{x}_0) = 0$ та $Q(x_0,\, \dot{x}_0) = 0$. Через особливу точку не проходить жодної або проходить більше ніж одна фазові траєкторії. Оскільки в особливих точках відповідно до (1) та (2) швидкість та прискорення дорівнюють нулю, то особливі точки фізично є точками спокою – положеннями стійкої або нестійкої рівноваги динамічної системи. За характером фазових траєкторій в околі особливої точки можна визначити вид руху динамічної системи та тип положення рівноваги.

Розглянемо прості особливі точки на прикладі лінійної автономної динамічної системи. Таку динамічну систему, показники якої періодично змінюються у часі, називають осцилятором. Загалом рух осцилятора описують диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{x} \pm 2n\dot{x} \pm k^2 x = 0. \quad (3)$$

Це рівняння еквівалентне двом диференціальним рівнянням першого порядку, які є рівняннями руху фазової точки:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -(\pm 2n\dot{x} \pm k^2 x) \ . \quad (4)$$

Виключивши з (4) час t, отримаємо диференціальне рівняння фазових траєкторій (інтегральних кривих):

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\pm 2n\dot{x} \pm k^2 x}{\dot{x}}. \quad (5)$$

Рівняння руху (3), (4) та рівняння фазових траєкторій (5) легко інтегруються. Тому побудувати фазові траєкторії не складно.

Якщо коливний рух лінійного осцилятора відбувається тільки під дією відновлювальної сили довкола положення стійкої рівноваги, то диференціальне рівняння руху має вигляд

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (6)$$

Після розв’язування рівняння (6) з урахуванням початкових умов отримуємо рівняння фазової траєкторії:

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{k^2} = a^2. \quad (7)$$

На фазовій площині у системі координат $Ox\dot{x}$ (рис. 1) залежність (7) є рівнянням еліпса. Відповідно до (7), особливу точку $x = \dot{x} = 0$ (початок координат на рис. 1) оточує сімейство подібних еліпсів з півосями a та ak, де a - амплітуда коливань. Особливу точку, через яку не проходить жодна з фазових траєкторій і яку оточують замкнуті траєкторії, називають *центром*. У верхній півплощині, коли $\dot{x} > 0$, і переміщення x зростає, фазова точка рухається зліва направо, у нижній півплощині, коли x зменшується, фазова точка рухається справа наліво. Фазова точка проходить будь-який еліпс за один і той самий проміжок часу T, що є періодом коливань.

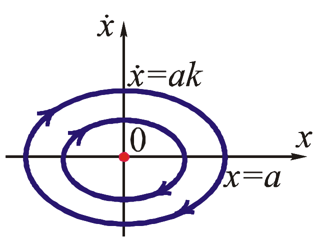


Рис. 1. Особлива точка фазових траєкторій – центр

Література

1. Василенко Н.В. Теория колебаний. / Н. В. Василенко – Киев: Вища школа, 1992. – 430 с.

Н.Т. Збір
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин,** кандидат фізико-математичних наук,доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

РОЗРАХУНОК ДАЛЬНОСТІ ПОЛЬОТУ СНАРЯДА

Відома задача з елементарної фізики,яка ілюструє чому визначення місця розміщення кореня є важливою задачею. Припустимо, що випустили снаряд під кутом b_0 з початковою швидкість V_o.

З елементарного курсу відомо, що опором повітря можна знехтувати і, що висота y=y(t) і дальність польоту x=x(t), виміряна в футах (1 фут=30,5 см) задовольняє рівняння:

$y = V_y t - 16t^2$ і $x = V_x t$ (1),

де горизонтальна і вертикальна складові початкової швидкості відповідно рівні $V_x=V_o\cos b_o$, $V_y=V_o\sin b_o$. Математична модель виражена в формулі (1) проста для обчислень, але дає занадто велику висоту і занадто велику величину шляху.

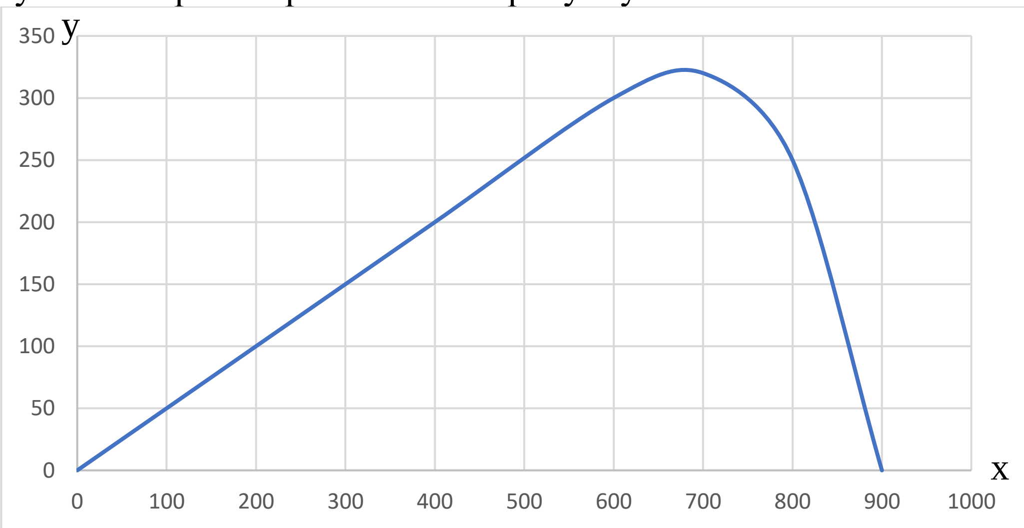
Якщо зробити додаткові припущення про те, що опір повітря є пропорційний швидкості, то отримаємо рівняння руху.

$y = f(\mathrm{t}) = \left(C\,V_y + 32C^2\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{c}}\right) - 32Ct$ (2)

$x = r(\mathrm{t}) = CV^x(1 - e^{-\frac{t}{c}})$ (3),

де $\mathrm{C} = \frac{m}{k}$ і к дорівнює коефіцієнту опору повітря, а m- маса снаряда.

Більше значення C приводить до більшої максимальної висоти і більшої дальності польоту снаряда. Графік траєкторії польоту снаряда, коли враховується опір повітря вказано на рисунку.



Ця уточнена модель більш реалістична, але потребує використання алгоритма знаходження кореня рівняння f(t)=0 , щоб знати час польоту снаряда. Елементарна модель не потребує складної процедури знаходження часу польоту.

Приклад. Снаряд випущений під кутом b_0=45°, V_y=V_x=160 фут/с і C=10. Знайти час польоту до падіння і дальність польоту .

Використовуючи формули (2) і (3) , отримаємо рівняння руху:

$$y = f(t) = 4800\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) - 320t$$

$$x = r(t) = 1600(1 - e^{-\frac{t}{10}})$$

Оскільки *f*(8)=83,220972 і *f*(9)= - 31,534367, використовуємо початкове наближення p_o=8.

$f'(t)=4800e^{-\frac{t}{10}} - 320$

$f'(p_o)$= f′(8)=-104,3220972

За формулою (1) отримуємо

$$p_1 = \frac{83{,}22097200}{-104{,}3220972} = 8{,}797731010$$

Результати обчислень маємо в таблиці 1.

Таблиця 1. Визначення часу польоту (з моменту коли висота дорівнює нулю)

k	час, p_k	$p_{kн}$-p_k	f(p_k)
0	8,000000	0,79773101	83,32097200
1	8,79773101	-0,05530160	-6,67369700
2	8,74242941	-0,00025475	-0,03050700
3	8,74217467	-0,00000001	-0,00000100
4	8,74217466	0,0000000	0,0000000

Величина p_1 має 9 десяткових знаків точності, і час до падіння t≈8,74217466с.

Дальність польоту можна вирахувати використовуючи *r*(t).

r(8,74217466)=1600(1-$e^{-0.874217466}$)=932,47 фути.

Перевага методу Ньютона перед методом ітерацій у тому, що він має вищу швидкість збіжності.

Чим більше значення |*f*′(x) | в околі кореня, тим менша поправка додається до попереднього наближення. Тому метод Ньютона зручно застосовувати тоді, коли в околі кореня графік функції y=f(*x*) має значну….

Недоліком методу Ньютона є те, що на кожній ітерації треба обчислювати не тільки *f*(*x*), а й *f*′(*x*).

А.І. Степанюк, О.Р. Заречанський, І.-Р. А. Вужинський
Львівський національний університет ім. Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Науковий керівник ***В. М. Фірман****, кандидат технічних наук, доцент кафедри безпеки життєдіяльності*

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СТРАТЕГІЙ У ВІЙСЬКОВИХ ОПЕРАЦІЯХ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ ІГОР ТА КРИТЕРІЯ ВАЛЬДА

У сфері оборони є потреба моделювати та передбачати дії ворожих агентів та гравців, які намагаються уникнути або перехитрити один одного. Моделювання того, як дії конкуруючих гравців формують прийняття рішень один одного, є завданням теорії диференційних ігор. Загалом, ця галузь вивчає як поведінка одного гравця може вплинути на поведінку іншого гравця через певний час.

Формально, в загальній формі, диференціальна гра може бути сформульована наступним чином. Є об'єкт керування, поведінка якого описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v)$$

де:

1) x - це n-вимірний вектор з компонентами $x_1, \ldots, x_n$;
2) $f(x, u)$ – n-вимір-на вектор-функція із компонентами $f_i(x, u)$, $i = 1, \ldots, n$,
3) u та v - керуючі параметри, які представляють r-вимірний та s-вимірний вектори відповідно, які можуть змінюватись на множинах U та V.

Крім того, задано термінальну множину $M \subset E^n$, де E^n - n-вимірний простір

Типовим прикладом задачі диференціальної гри може слугувати задача перехоплення бомбардувальника противника винищувачем. Обидва об'єкти (і винищувач, і бомбардувальник) керовані, і їхня поведінка залежить від того, яким чином діють пілоти. Однак керування знаходиться в руках різних осіб з протилежними інтересами: бомбардувальник ухиляється від зустрічі, а винищувач переслідує його. Складність задачі керування для пілота винищувача полягає в тому, що в нього відсутня інформація про майбутні дії противника. Пілот винищувача знає технічні можливості свого літака, знає його положення в цей час, однак не може знати, яке рішення про своє керування прийме пілот бомбардувальника в кожний наступний момент часу. Тому його рішення має базуватись на ситуації, яка склалась до цього моменту.

В застосуванні теорії ігор до сухопутних військових операцій, більшість досліджень зосереджені на оборонній війні, коли військові приймають рішення про те, як найкраще розмістити земельні оборонні споруди проти багатьох загроз. Деякі дослідження також зосереджені на історичних конфліктах на землі та надають гейміфікований аналіз в підсумку, розкриваючи, які рішення, прийняті інтуїтивно в історичних конфліктах, мали раціональне та математичне обґрунтування. Пріоритетне розподілення військових ресурсів є також фундаментальним для успіху і часто займає провідне місце в стратегічних рішеннях. Крім того, в сценаріях, що пов'язані з діями сухопутних військ, важливо оцінити знання про противників, їх можливі тактики або терен: може знадобитися боротися з повітряними силами, які вставляються в певних місцях, або долати невизначену територію. В кожній з цих ситуацій розуміння того, де у військових є неповна інформація, допоможе цій силі приймати раціональні рішення.

Для побудови диференційованих ігрових рішень використовують різні підходи, проте традиційним вважається критерій Вальда. Це є критерій крайнього песимізму, оскільки статистик вважає, що «природа» діє проти нього найгіршим чином. Це критерій гарантованого результату.

Іншими словами, мінімаксний критерій Вальда використовується у випадках, коли необхідна гарантія, щоб програш в будь-яких умовах виявився не більше, ніж найменший з можливих в гірших умовах (кращий з гірших).Даний критерій простий і чіткий, але консервативний у тому сенсі, що орієнтує приймає рішення на занадто обережну лінію поведінки. Тому критерієм Вальда, головним чином, користуються у випадках, коли необхідно забезпечити успіх при будь-яких можливих умовах.

Критерій Вальда забезпечує максимізацію мінімального виграшу або, що теж саме, мінімізацію максимального програшу (втрат), який може виникнути при реалізації однієї зі стратегій. Цей критерій орієнтує особу, що приймає рішення дотримуватися вкрай обережної поведінки. Така поведінка прийнятна наприклад, коли гравець не має зацікавленості в максимальному виграші, але хоче себе застрахувати від неочікуваних програшів. Вибір такої поведінки визначається відношенням гравця до ризику.

Отже, підсумовуючи все вищенаведене, вважаємо, що хоча критерій Вальда є занадто «обережною» стратегією ведення гри та применшує гарантовані виграші. Цей критерій варто застосовувати у тих випадках, коли необхідно забезпечити успіх навіть за найкритичнішої ситуації. Так як бойові дії можуть призвести до значної кількості жертв, розуміння того, як найкраще мінімізувати людські втрати, є ключовою складовою успішності стратегії.

Література

1. Пшеничний Б. Н., Енциклопедія кібернетики, т. 1. Академія наук УРСР (Київ, Україна). 1973. с. 342-343.
2. Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. Wiley (Нью-Йорк, США). 1965.
3. Owen, G. Game Theory. 3rd Edition. Academic Press (Сан-Дієго, США). 1995.
4. Балджи М.Д., Карпов В.А., Ковальов А.І., Костусєв О.О., Котова І.М., Сментина Н.В. Обґрунтування господарських рішень і оцінювання ризиків. Одеський національний економічний університет (Одеса, Україна). 2013.
5. Ho E., Rajagopalan A., Skvortsov A., Arulampalam S., Piraveenan M. Game Theory in Defence Applications: A Review. Sensors (Базель, Швейцарія). 2022.

С. С. Тороній, М.Ю. Петришин
Львівський Національний Університет ім. Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
*Науковий керівник **В.М.Фірман**, доцент кафедри безпеки життєдіяльності*

КРИПТОГРАФІЯ ТА RSA АЛГОРИТМ: ЗАХИСТ ПРИВАТНОЇ ІНФОРМАЦІЇ У СВІТІ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

У світі цифрових технологій та швидкого розвитку інтернету, захист приватної інформації стає надзвичайно важливою та актуальною темою для обговорення. Криптографія є наукою, що досліджує методи захисту інформації від несанкціонованого доступу, а RSA алгоритм, розроблений у 1977 році Роном Рівестом, Аді Шаміром та Леонардом Адлеманом, є одним з найбільш ефективних методів шифрування інформації.

Історія криптографії довга та багата на різноманітні методи захисту інформації. Але тільки з появою RSA-алгоритму відбувся поворот у сфері криптографії. RSA-алгоритм став першим асиметричним криптографічним алгоритмом, який дозволяє зашифрувати повідомлення за допомогою публічного ключа, який може бути розповсюджений відкрито, а розшифрувати його може тільки власник приватного ключа.

RSA-алгоритм став можливим завдяки математичному відкриттю, яке змінило світ криптографії - відкриттю теорії чисел та теорії складних чисел. Ці теорії дозволили створити ефективні алгоритми, які були недосяжні раніше. RSA-алгоритм використовує теорію чисел для шифрування повідомлення та забезпечення безпеки обміну даними відкритою мережею.

Сьогодні RSA-алгоритм використовується у багатьох сферах - від електронної пошти та онлайн-банкінгу до мережі Інтернет та забезпечення безпеки державних комунікацій.

Таким чином, математичні відкриття у теорії чисел та теорії складних чисел змінили світ криптографії, а RSA-алгоритм став ключовим компонентом безпеки в цифровому світі.

RSA відкрила нові можливості в сфері безпеки інформації, дозволяючи зберігати та передавати конфіденційну інформацію в інтернеті. Цей алгоритм використовується для захисту фінансової інформації, персональних даних, медичних записів, комерційної інформації та багато іншого. Використання RSA дозволяє зберігати конфіденційну інформацію в зашифрованому вигляді, що зменшує ризик її втрати та підтримує конфіденційність.

Однак, як і у випадку з будь-якою технологією, RSA не є бездоганним і має свої обмеження та потенційні ризики. Наприклад, у разі недостатньої довжини ключа, RSA може бути зламаний шляхом перебору варіантів.

Додатково, RSA може бути піддане атакам з використанням побічних каналів, таких як канали спостереження за енергетичними споживаннями пристроїв, атаки з використанням фізичних властивостей елементів, а також атаки на основі математичних вразливостей алгоритму.

Однак, забезпечення безпеки за допомогою RSA все ще є ефективним, якщо використовувати досконалу реалізацію алгоритму, довгі ключі та правильні процедури зберігання та передачі ключів.

Також, у сучасному світі існують інші асиметричні криптографічні алгоритми, які можуть конкурувати з RSA за ефективністю та безпекою. Проте, RSA є одним з найбільш поширених та визнаних алгоритмів у світі криптографії.

Отже, застосування криптографії у світі цифрових технологій стає все важливішим, оскільки збільшується кількість персональної інформації, яку потрібно захищати від несанкціонованого доступу. RSA алгоритм, базований на математичних принципах, є одним із найбільш використовуваних методів шифрування для захисту приватної інформації. Цей алгоритм побудований на основі простих математичних операцій, таких як модульне піднесення до степеня і обернене модульне множення.

Математичні відкриття, що лежать в основі RSA алгоритму, змінили світ криптографії та безпеки інформації. Математика відіграє важливу роль у вирішенні складних проблем безпеки, дозволяючи створювати нові методи захисту від зловмисників. Невід'ємною частиною розвитку цифрових технологій є і постійне удосконалення методів криптографії на основі математичних відкриттів.

Література

1. Ковальова, О. М. Криптографія: навч. посібник / О. М. Ковальова. – Київ: Центр учбової літератури, 2016. – 304 с.
2. Столінський, Ю.І. Захист інформації в комп’ютерних системах: підручник / Ю.І. Столінський. – Київ: Національний авіаційний університет, 2019. – 332 с.
3. Пенкер, М. Криптографія: математичні засади та застосування / М. Пенкер; пер. з англ. І. В. Корольова. – Київ: Наукова думка, 2012. – 512 с.
4. Boneh, D. Twenty Years of Attacks on the RSA Cryptosystem / D. Boneh, A. Joux. – Notices of the AMS, 2013. – Vol. 60, No. 11. – P. 1472-1483.
5. Menezes, A. Handbook of Applied Cryptography / A. Menezes, P. van Oorschot, S. Vanstone. – Boca Raton: CRC Press, 1996. – 816 p.

С.О. Шувар*, *В.Ю. Магденко*, *Р.М. Стахів
Львівський Національний Університет ім. Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
*Науковий керівник **В.М.Фірман**, доцент кафедри безпеки життєдіяльності*

КЕРУВАННЯ ХАОСОМ НА ПРИКЛАДІ МАПИ ХЕНОНА

Теорія хаосу - математичний апарат, що описує поведінку деяких нелінійних динамічних систем, схильних до явища, відомого як хаос. Поведінка такої системи здається випадковою, навіть якщо модель, що описує систему, є детермінованою.

Прикладами подібних систем є атмосфера, турбулентні потоки, біологічні популяції, суспільство як система комунікацій і його підсистеми: економічні, політичні та інші соціальні системи. Досягнення порядку у таких системах та можливість передбачати їх поведінку може забезпечити безпеку людини в суспільстві, а також допомогти уникнути катаклізмів. При їх вивченні, аналітичне дослідження наявних рекурентних співвідношень, зазвичай супроводжується математичним моделюванням, тобто поведінку таких систем можна описати за допомогою диференціальних рівнянь.

У даній роботі буде розглянуто основну ідею керування хаосом, буде імплементовано алгоритм OGY, та проілюстровано роботу цього алгоритму на конкретному прикладі.

У загальному вигляді динамічна система записується у вигляді рівняння неперервної системи в часі $\dot{x} = f(x,u)$ або у вигляді дискретної системи в часі - $x_{i+1} = f(x_i, u_i)$, де x - вектор стану, а u - вхідний вектор системи.

Розпізнати хаотичну поведінку можна лише аналізуючи реакцію системи, яка може бути дуже складною та схожою на шум. Можна виділити такі основні ознаки ХДС як: чутлива залежність до початкових умов, щільність хаотичного атрактора, а також наявність у скелеті хаотичного атрактора не лише нескінченної кількості хаотичних траєкторій, але і нескінченної кількості періодичних орбіт, кожна з яких є нестабільною.

Суть керування хаосом полягає в тому, що траєкторія ергодично наближається до бажаної періодичної орбіти, вбудованої в атрактор, тому застосувавши невеликі збурення таку орбіту можна стабілізувати. Для застосування цих збурень один із параметрів системи повинен бути доступним, тобто цей параметр можна регулювати під час роботи системи. Таким чином, цей параметр стає входом системи. Оскільки хаос поводиться ергодично, в якийсь момент часу розв’язок надійде в окіл певної точки орбіти, де дійсна лінеаризація. За допомогою цієї лінеаризації простий метод розміщення полюсів може бути використаний для розрахунку керуючого зусилля, щоб спрямувати систему до цієї точки і, отже, до орбіти.

Особливим видом хаотичної системи є так звана мапа Хенона.Ця дискретна часова система, або карта, описує основні характеристики хаотичної поведінки і має дуже чіткий дивний атрактор. Рівняння задається системою:

$x_{i+1} = f_1(x_i, y_i) = y_i + 1 - ax_i^2$
$y_{i+1} = f_2(x_i, y_i) = bx_i,$
типові значення параметрів, при яких виникає хаос – це $a = 1.4$ і $b = 0.3$.

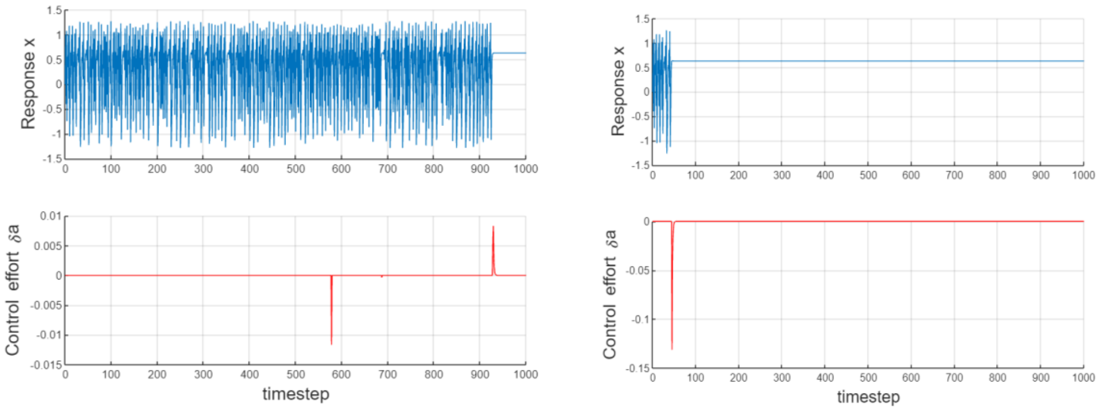
Зафіксувавши точки $x_{i+1} = x_i = x^*$ та $y_{i+1} = y_i = y^*$, а також прийнявши період $T = 1$, отримали:

$\left.\begin{matrix} x^*=y^*+1-ax^{*2} \\ y^*=bx^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^* = bx^* + 1 - ax^{*2} \Longrightarrow ax^{*2} + (1-b)x^* - 1 = 0 \Rightarrow x^* = \frac{-(1-b)\pm\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}.$

Для $a = 1.4$ та $b = 0.3$, отримали: $\binom{x^*}{y^*} = \binom{-1.1314}{-0.3394}$ та $\binom{x^*}{y^*} = \binom{0.6314}{0.1894}$.

Так як перша точка лежить на краю басейну притягання і тому не підходить для контролю OGY, при подальших обрахунках буде використовуватись лише друга фіксована точка. Пролінеаризувавши карту Хенона використавши $x_{i+1} - x^* = A(x_i - x^*) + B(p - \bar{p})$, отримали $A = D_{x,y}f(x, y, a, b) = \begin{bmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $B_a = D_a f(x, y, a, b) = \begin{bmatrix} -x^2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_b = D_b f(x, y, a, b) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$. Перевіряємо, чи дана система є керованою, склавши відповідні кожному з параметрів матриці контролю: $P_a = [B_a, AB_a] = \begin{bmatrix} -x^2 & 2ax^3 \\ 0 & -bx^2 \end{bmatrix}$ та $P_b = [B_b, AB_b] = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix}$. Обидві матриці мають повний ранг, якщо $x \neq 0$. Так як система контрольована застосовуємо правило зворотного зв'язку: $p - \bar{p} = -K^T(x_i - x^*)$. Матрицю K^Tможна з легкістю обчислити використовуючи алгоритм Аккермана.

Успіх OGY залежить лише від вибору максимального збурення параметра, яке назвемо δa_{max} або δb_{max}. На малюнку 1 показано вихід карти Хенона для різних варіантів доступного параметра a. Бачимо, що система веде себе хаотично, аж поки не застувалось збурення, а також переконуємось, що чим більше це значення δb_{max}, тим довше шукається окіл.



Мал. 1 (Робота алгоритму OGY за різних значень δb_{max}: 0.015 та 0.15 відповідно)

Варто сказати, що OGY потребує дуже невеликих зусиль контролю, що, безперечно, є перевагою, наприклад для систем, де параметри не можуть бути сильно змінені через різні обмеження. Ще одна перевага полягає в тому, що алгоритм не потребує ніякої математичної моделі.

Теорія керування хаотичними систем - це відносно нова сфера досліджень, початок розвитку якої приписують на 1990 рік. Зараз ці алгоритми уже змінюють

Світ та знайшли застосування у численних галузях науки та техніки. На приклад при сезонних епідеміях хаос може бути подоланий, якщо використовувати сталий, досить високий темп вакцинації. Також алгоритм може швидко стабілізувати динаміку популяцій і використовуватись для контролю над паразитами та комахами. Це безперечно доводить як цінність даної галузі, так і потребу ще глибше і глибше досліджувати та покращувати дану галузь для досягнення безпеки людини на планеті.

Література

1. Andrievskii , B. R., & Fradkov, A. L. (2003, November 5). *Control of Chaos: Methods and Applications. I.Methods*.
2. Andrievskii , B. R., & Fradkov, A. L. (2004, November 4). *Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications*.
3. BOCCALETTI, S., GREBOGI, C., LAI , Y.-C., MANCINI, H., & MAZA, D. (2000, June). *THE CONTROL OF CHAOS: THEORY AND APPLICATIONS*.
4. Witvoet, J. (2005, March 31). *Control of Chaotic Dynamical Systems using OGY*.
5. Jentoft, & Li. (2008, October 19). *Stabilizing the H´enon Map with the OGY Algorithm*.
6. Fradkov , A. L. (n.d.). *CONTROL OF CHAOTIC SYSTEMS*.
7. Вовк, В. Д. (2015). *Моделювання еволюційних систем*

Р.І.Герелей
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИКИ В КРИПТОРАФІЇ

Дипломатичні, військові і промислові секрети, як правило, передаються або зберігаються не у початковому вигляді, а після шифрування. На відміну від тайнопису, що приховує сам факт наявності повідомлення, шифрування передаються відкрито, а закривається тільки зміст. Отже криптографія забезпечує збереження змісту повідомлення за допомогою *шифрування* й відкриття його *розшифруванням,* які виконують за спеціальними *криптографічними алгоритмами* з допомогою *ключів* у відправника і одержувача.

Відправником шифрується повідомлення за допомогою ключа, отримане шифрування передається по відкритому каналу зв'язку одержувачу, у той час, як ключ відправляється йому по закритому каналу, що гарантує таємність. Маючи ключ і шифрування, одержувач виконує розшифровування й відновлює вихідне повідомлення.

Криптографічні перетворення використовуються для досягнення двох цілей щодо захисту інформації. По-перше, вони забезпечують неприступність її для осіб, що не мають ключа, по-друге, підтримують із необхідною надійністю виявлення несанкціонованих підмін.

До необхідних аксесуарів криптографічної техніки, крім алгоритмів шифрування й розшифрування, належать секретні ключі. Їх роль така ж, як і в ключів від сейфа.

Лінійний шифр $k-$го порядку (Хілла).

Відкрите повідомлення при такому шифруванні розбивається на $k-$грами. Кожній $k-$грамі ставимо у відповідність вектор X (тобто матриця розміру $k\times 1$). Криптотекст задається з допомогою *ключа* $A\in GL_k(\mathbb{Z}_N)$, де $GL_k(\mathbb{Z}_N)$ – це множина оборотних матриць розміру $k\times k$ з коефіцієнтами з кільця $\mathbb{Z}_N \overset{df}{=} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},$ де $N-$число букв алфавіту, яким користується відправник (для українського алфавіту $N=33,$ якщо не враховані пробіли чи розділові знаки).

Шифрування: З допомогою необоротної над $\mathbb{Z}_N$ матриці A знайдемо криптотекст $C=AX=X'.$

Дешифрування: $D(X')=D(AX)=A^{-1}X'=A^{-1}AX=X$, тобто дешифрування здійснюється з допомогою оберненої до матриці A над кільцем $\mathbb{Z}_N$ матриці A^{-1}.

Розглянемо докладніше випадок $k=2$, тобто біграмний лінійний шифр. В якості ключа виберемо довільну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_N \qquad (3)$$

з $\det A\neq 0$ і НСД$(\det A, N)=1$.

Приклад. Нехай потрібно зашифрувати з допомогою біграмного лінійного шифру слово «БОРІТЕСЯ -ПОБОРЕТЕ» з ключем $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Поставимо у відповідність біграмам «БО», «РІ», «ТЕ», «СЯ», «ПО», «БО», «РЕ», «ТЕ» вектори, використовуючи табл.1.

А 0	Б 1	В 2	Г 3	Ґ 4	Д 5	Е 6	Є 7	Ж 8	З 9	И 10
І 11	Ї 12	Й 13	К 14	Л 15	М 16	Н 17	О 18	П 19	Р 20	С 21
Т 22	У 23	Ф 24	Х 25	Ц 26	Ч 27	Ш 28	Щ 29	Ь 30	Ю 31	Я 32

Табл.1

«БО»$\to\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}$; «РІ»$\to\begin{pmatrix} 20 \\ 11 \end{pmatrix}$; «ТЕ»$\to\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix}$. «СЯ» $\to\begin{pmatrix} 21 \\ 32 \end{pmatrix}$.

«ПО»$\to\begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix}$; «БО»$\to\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}$; «РЕ»$\to\begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$. «ТЕ» $\to\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Отримаємо відкритий текст: $\begin{pmatrix} 1 & 20 & 22 & 21 & 19 & 1 & 20 & 22 \\ 18 & 11 & 6 & 32 & 18 & 18 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Знайдемо криптотекст, використовуючи ключ A. Отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 20 & 22 & 21 & 19 & 1 & 20 & 22 \\ 18 & 11 & 6 & 32 & 18 & 18 & 6 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 31 & 28 & 20 & 4 & 19 & 26 & 28 \\ 11 & 3 & 17 & 17 & 17 & 11 & 31 & 17 \end{pmatrix}$$

Отже, криптотекст – це стовпці матриці: $\begin{pmatrix} 19 & 31 & 28 & 20 & 4 & 19 & 26 & 28 \\ 11 & 3 & 17 & 17 & 17 & 11 & 31 & 17 \end{pmatrix}$

Відповідні біграми за таблицею 1 – наступні: «ОІ», «ЮГ», «ШН», «РН», «ҐН», «ПІ», «ЦЮ», «ШН». Таким чином, одержувач отримав шифрований текст «ОІЮГШНҐНПІЦЮШН».

Далі одержувач хоче розшифрувати його. Для цього потрібно знайти обернену до A матрицю за правилами лінійної алгебри. Така матриця існує, оскільки вона оборотна. Знайдемо $\det A\equiv 1-26 \pmod{33}\equiv -25 \pmod{33}\equiv 8 \pmod{33}$, НСД$(8,33)=1$.

Тому $A^{-1}=8^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -26 & 1 \end{pmatrix}\equiv 8^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \pmod{33}$.

Знайдемо 8^{-1}, використовуючи ділення з остачею

$$33=8\cdot 4+1\Rightarrow 1=33-8\cdot 4,$$

Звідки отримуємо $8^{-1}\equiv -4 \pmod{33}\equiv 29 \pmod{33}$.

Тому $A^{-1}\equiv\begin{pmatrix} 29 & 4 \\ 5 & 29 \end{pmatrix} \pmod{33}$.

Застосуємо до стовпців криптотексту матрицю A^{-1}.

Маємо: $\begin{pmatrix} 29 & 4 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 19 & 31 & 28 & 20 & 4 & 19 & 26 & 28 \\ 11 & 3 & 17 & 17 & 17 & 11 & 31 & 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 20 & 22 & 21 & 19 & 1 & 20 & 22 \\ 18 & 11 & 6 & 32 & 18 & 18 & 6 & 6 \end{pmatrix}$..

Отже, ми прийшли до відкритого тексту «БОРІТЕСЯ -ПОБОРЕТЕ».

Література

1. М.Ф.Стасюк Математичні основи криптографії (спеціальні розділи математики). Навчальний посібник. ЛДУБЖД. Львів. -2021.
2. О.В.Вербіцький Вступ до криптології / О.В. Вербіцький. – Львів.: ВНТЛ, 1998. – 246с.

Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

В. Гайдамаха
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ НАВАНТАЖЕННЯ

Математичну модель задачі розглянемо як кругову циліндричну оболонку з товщиною δ, радіусом R, довжиною l, під дією узагальненого навантаження p_1 і p_3 у відповідній системі координат. Для математичної постановки вихідних співвідношень використаємо основні положення та гіпотези моментної теорії оболонок [1]. В оболонці виникає осесиметричний напружений стан, який описується інтегрованими відносно відповідних напружень силовими факторами. Також виділили елементи серединної поверхні оболонки $dx, d\theta$ (рис.3,4). Відповідно обчислили силові фактори:

$$N_1 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_1 dz, \quad N_2 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_2 dz, \tag{1}$$

$$M_1 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_1 z dz, \quad M_2 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_2 z dz, \quad Q_1 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{1z} dz \tag{2}$$

Отримали рівняння рівноваги, де перші три тотожно виконуються:

$$\sum Y = 0, \sum M_x = 0, \sum M_z = 0,$$

а решта у вигляді:

$$\begin{gathered} \sum X = 0; \quad \frac{dN_1}{dx} + p_1 = 0, \\ \sum Z = 0; \quad \frac{dQ_1}{dx} - \frac{N_2}{R} + p_3 = 0, \\ \sum M_y = 0; \quad \frac{dM_1}{dx} - Q_1 = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Після скорочення на $R\,d\theta\,dx$ не враховуємо нескінченно малі величини вищих порядків. Із першого рівняння після його інтегрування отримуємо

$$N_1 = N_0 + \int_0^{x_1} p_1 dx, \tag{4}$$

де в більшості випадків навантаження N_0 на лівому торці оболонки відоме, і задача визначення зусиль N_1 статично визначена. У двох рівняннях, що залишилися, містяться три невідомі статичні величини, і задача в цілому - статично невизначена. Для вирішення проблеми розглянули поздовжні переміщення точки, що знаходиться на відстані z від серединної поверхні, також використали залежності узагальненого закону Гука.

Виключили з рівнянь рівноваги (3) перерізуючу силу:

$$\frac{dN_1}{dx} + p_1 = 0, \qquad \frac{d^2M_1}{dx^2} - \frac{N_2}{R} + p_3 = 0. \tag{5}$$

Підставляючи в (5) вирази для узагальнених сил у переміщеннях, отримали:

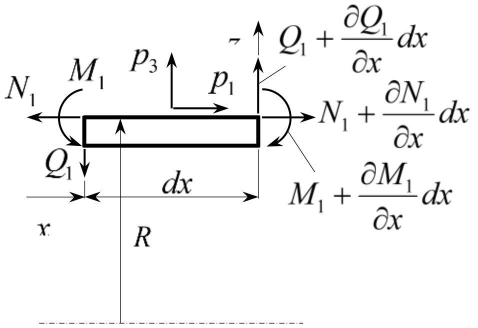


Рис.1. Виділений елемент dx.

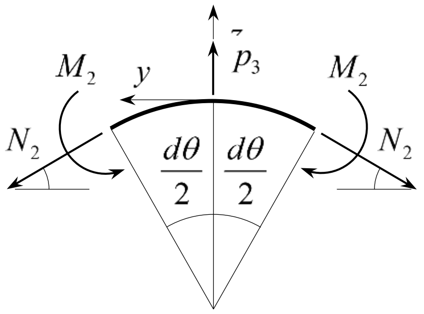


Рис.2 Виділений елемент $d\theta$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\mu}{R}\frac{dw}{dx} = \frac{1-\mu^2}{E\delta}\left(\frac{dN_t}{dx} - p_1\right)$$

$$\frac{\mu}{R}\frac{du}{dx} + \frac{w}{R^2} + \frac{\delta^2}{12}\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{1-\mu^2}{E\delta}\left(p_3 + \frac{N_t}{R} - \frac{d^2M_t}{dx^2}\right) \tag{6}$$

де E - модуль пружності, μ - коефіцієнт Пуассона

При інтегруванні цієї системи з'являються шість довільних сталих, які визначаються із шести граничних умов – по три на кожному з торців оболонки. Вважаючи зусилля N_1 відомим з розв'язку статично визначеної задачі, після перетворень з другого рівняння (6) отримали звичайне диференціальне рівняння відносно переміщень.

Література

1. Дзюба А.П., Прокопало Є.Ф., Дзюба П.А. Несуча здатність циліндричних оболонок з отворами. Монографія. – Д: Ліра, 2014. 224 с.

В. Старчак
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

РОЗКЛАД ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ В РЯД ФУР'Є

Теоретичні та практичні засоби використання ряду Фур'є замість функції *f(x)* в задачах моделювання і обробки результатів інженерних та наукових досліджень називають гармонічним аналізом. При практичних розрахунках необхідно обмежитися тільки деякою кількістю перших членів ряду Фур'є. В результаті можна отримати лише наближений аналітичний вираз для функції *f(x)* в вигляді тригонометричного многочлена N-го порядку:

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Крім того, зауважимо, що відомі формули [1] для обчислення коефіцієнтів Фур'є a_n , b_n можна використовувати лише в випадку аналітичного задання функції. На практиці на жаль, як правило, функція *f(x)* задається в вигляді таблиць або графіків. Для дослідження представлення експоненціальної функції e^{-px}, яка має важливе значення при обробці акустичних сигналів, з параметром p рядом Фур'є використовували програмне середовище Mathcad, яке налаштоване на зручний запис програмованих виразів. Нижче представлено лістинг розробленої програми при p=1:

$$f(x) := e^{-x}$$

$$n := 0..50 \quad N := 51 \quad l := 2$$

$$a_n := \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\left(\frac{x \cdot \pi \cdot n}{l}\right) dx$$

$$b_n := \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) dx$$

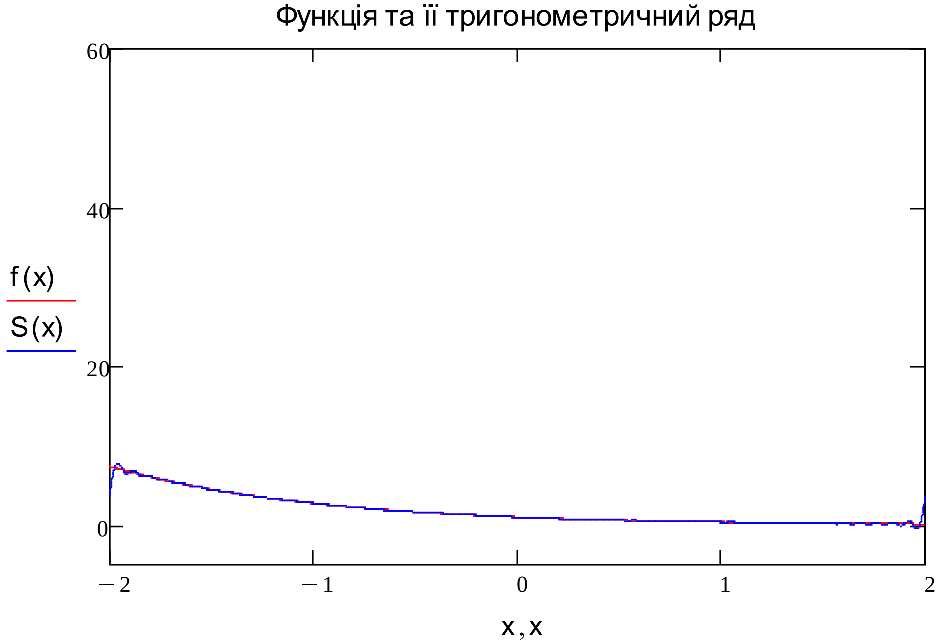
$$S(x) := \sum_{n} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right)\right) - \frac{a_0}{2}$$

$$\sigma_n := \left(0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{n - N}{N}\right)\right)$$

$$\sigma 1_n := 1 - \frac{|n|}{N}$$

$$Sg(x) := \sum_n \left[\sigma_n \cdot \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right)\right)\right] - \frac{a_0}{2} \cdot \sigma_0$$

Обчислено представлення цієї функції частинною сумою при N=51 при різних значеннях параметра 1 до 5. Отримано графічні результати, які свідчать про значне зростання похибки при збільшенні параметра :



при значенні параметра p=1

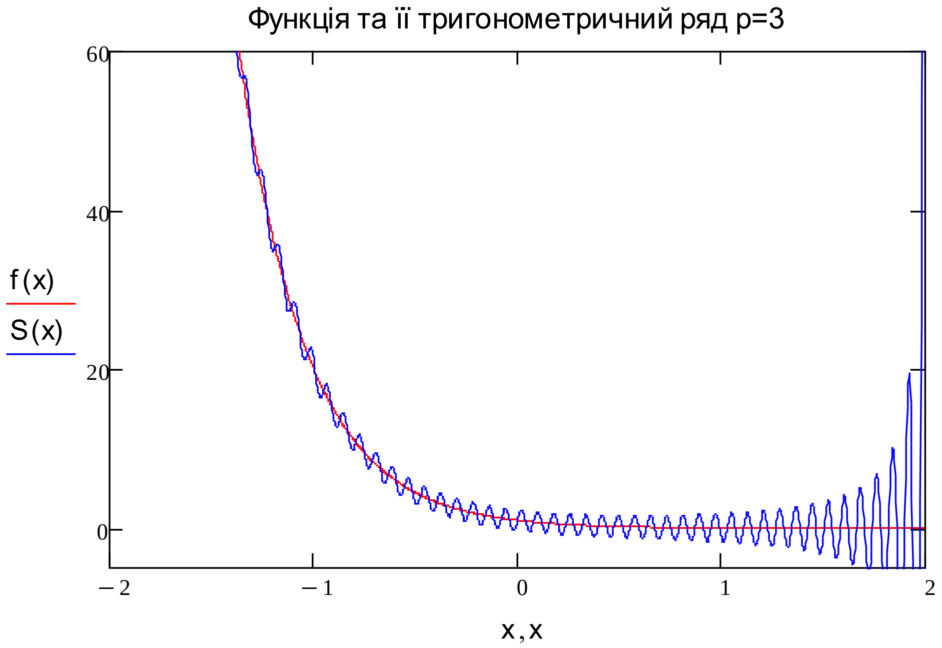


Рис.1. Графічні порівняльні залежності для значень параметра *p*=1 і *p*=3.

Література

1. Теорія рядів ./ С. А. Щоголєв ; М-во освіти і науки України, Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, Ін-т математики, економіки та механіки. – Одеса : ОНУ, 2015. – 74 с.

Р. Прокоп'як
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

АПРОКСИМАЦІЯ ПОЛІНОМАМИ З ДИСПЕРСІЙНОЮ ОЦІНКОЮ

Для математичного моделювання функціональних залежностей поліномами використали програмну систему Mathcad, яка відноситься до систем комп'ютерної алгебри, тобто засобів автоматизації математичних розрахунків. Апроксимували матрично задані значення невідомої функції сезонної залежності продажу товарів методом найменших квадратів поліномами 1, 2, 3 та 4 степенів. На рис.1 у вузлових точках представлено розрахункові дані сезонної залежності продажу товарів (помісячно) у тис. од. Для отримання модельних залежностей використали алгоритм методу найменших квадратів [1]. При цьому для поліномів 1- 4 степенів знайшли їх коефіцієнти шляхом розв'язку систем лінійних рівнянь - відповідно кількість рівнянь в системах була від двох до п'яти. Для поліномів 1 і 2 степеня коефіцієнти визначали за допомогою функції regress, для полінома 3-го степеня за допомогою функції linfit, і 4-го степеня за допомогою функції interp. Побудовано суміщені графіки заданих вузлів та всіх поліномів, а для дисперсійної оцінки - графік суми квадратів відхилень поліномів у всіх вузлах залежно від їх степеня. Зручною особливістю Mathcad є можливість матричного представлення систем рівнянь, а саме розрахункових формул коефіцієнтів та вільних членів (1), та результатів їх обчислення у матричному вигляді. У наступних формулах: C4 – матриця коефіцієнтів. a b4 – вільних членів.

$$C4 := \begin{bmatrix} m & \sum_{i=0}^{m-1} x_i & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^2 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^3 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^4 \\ \sum_{i=0}^{m-1} x_i & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^2 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^3 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^4 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^5 \\ \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^2 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^3 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^4 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^5 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^6 \\ \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^3 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^4 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^5 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^6 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^7 \\ \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^4 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^5 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^6 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^7 & \sum_{i=0}^{m-1} (x_i)^8 \end{bmatrix} \qquad b4 := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} y_i \\ \sum_{i=0}^{m-1} (y_i \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^{m-1} \left[y_i \cdot (x_i)^2\right] \\ \sum_{i=0}^{m-1} \left[y_i \cdot (x_i)^3\right] \\ \sum_{i=0}^{m-1} \left[y_i \cdot (x_i)^4\right] \end{bmatrix} \tag{1}$$

З лістингу виконаної програми отримали результати за формулами (1):

$$C4 = \begin{pmatrix} 12 & 78 & 650 & 6.084\times10^{3} & 6.071\times10^{4} \\ 78 & 650 & 6.084\times10^{3} & 6.071\times10^{4} & 6.307\times10^{5} \\ 650 & 6.084\times10^{3} & 6.071\times10^{4} & 6.307\times10^{5} & 6.736\times10^{6} \\ 6.084\times10^{3} & 6.071\times10^{4} & 6.307\times10^{5} & 6.736\times10^{6} & 7.34\times10^{7} \\ 6.071\times10^{4} & 6.307\times10^{5} & 6.736\times10^{6} & 7.34\times10^{7} & 8.121\times10^{8} \end{pmatrix} \quad b4 = \begin{pmatrix} 700 \\ 4.715\times10^{3} \\ 3.878\times10^{4} \\ 3.524\times10^{5} \\ 3.389\times10^{6} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Графіки поліноміальних залежностей P11-P41 (1-4 степенів) та дисперсії представлено на рис.:

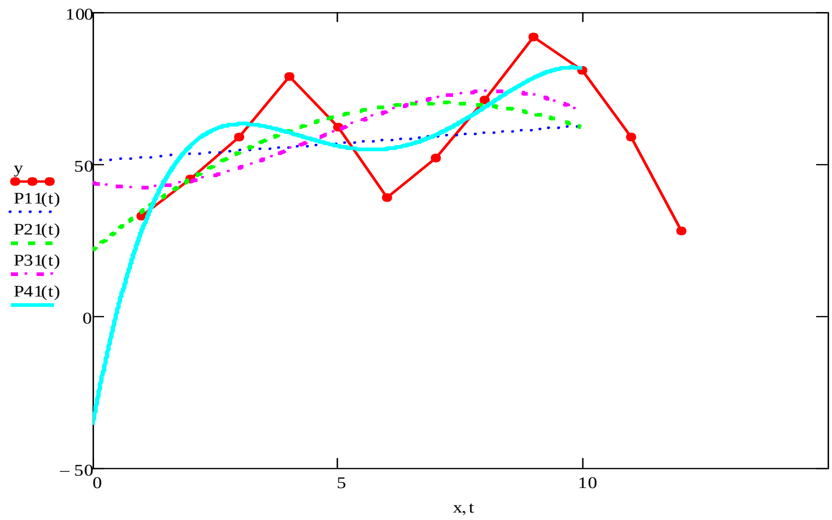


Рис.1. Вузлові точки даних та апроксимаційні залежності.

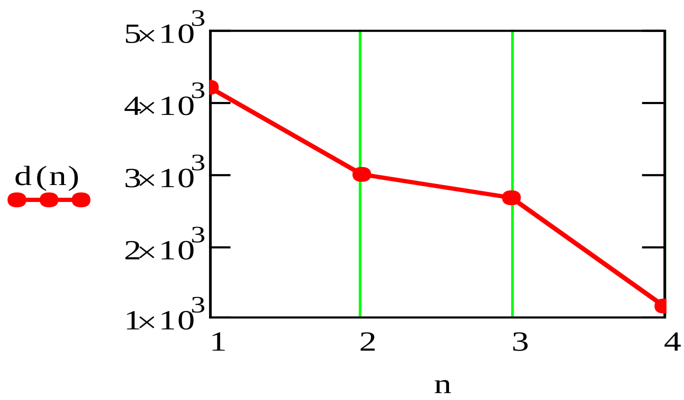


Рис.2. Дисперсійний аналіз: n-степінь полінома, d(n)-дисперсія.

Аналіз показує, що найкраща модель залежності - поліном 4-го степеня.

Література

1. Гембара Т.В. Системний аналіз і моделювання: Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт. - Львівський державний університет безпеки життєдіяльності. Львів, 2020 р. - 29 с.

СЕКЦІЯ 2. Математичні відкриття, що змінили світ

В. В. Матуш, А. О. Іванкова
Львівський національний університет імені Івана Франка
Науковий керівник ***Л.Ю. Фірман*** *старший викладач кафедри вищої математики, механіко-математичного факультету*

СИЛА МАТЕМАТИКИ: ЯК МАТЕМАТИЧНІ РІШЕННЯ ЗРОБИЛИ РЕВОЛЮЦІЮ В ІНЖЕНЕРІЇ МОСТІВ

Математика — є важливим інструментом, завдяки якому вдалося зробити колосальний внесок в різноманітні галузі життєдіяльності. З давніх часів і до наших днів дійшли розробки математиків, формули та рішення, які змінили світ. Тут ми розглянемо використання математичних рішень у галузі техніки, зокрема, у будівництві мостів.

Мости є важливою частиною нашої транспортної інфраструктури. Ці конструкції дозволяють людям і різноманітним вантажам безпечно й ефективно пересуватися через такі перешкоди, як річки, долини та каньйони. Будівництво мостів завжди було складним завданням через комплекс сил, залучених до їх проектування та будівництва. Тож, саме використання математичних формул і рішень дозволило спроектувати та побудувати мости, здатні витримувати екстремальні погодні умови та велике транспортне навантаження.

Одним із найважливіших факторів при проектуванні мосту є розрахунок сил, які міст повинен витримувати. Мости піддаються декільком типам сил, включаючи стиснення, розтяг, згин і кручення. Ці сили розраховуються за допомогою математичних формул, що враховують різні фактори, такі як вага мосту, вага транспорту, вітрове навантаження та сейсмічна активність у районі розташування об'єкту.

Фундаментною формулою, яка використовується при проектуванні мостів, вважають залежність напруги та деформації. Ця формула використовується для розрахунку величини напруги, яку може витримати матеріал, перш ніж він зруйнується:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Де σ — напруга; F — сила, прикладена до матеріалу; A — площа, на яку прикладена сила.
Варто зауважити що саме із цієї формули проектантам вдається розраховувати величину сили, яку міст може витримати без збою.

Іншою важливою формулою, яка використовується при проектуванні мостів, – є рівняння балки Ейлера-Бернуллі, яке використовується для розрахунку величини прогину/вигину, яку може витримати балка, перш ніж вийти з ладу:

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

Де δ — прогин або вигин, F — сила, прикладена до балки, L — довжина балки, E — модуль пружності матеріалу, I — момент інерції поперечного перерізу балки.

Опісля завершення етапу проектування мосту починається процес його будівництва, що передбачає використання багатьох математичних рішень, включаючи геометрію, тригонометрію та обчислення.

Геометрія використовується в мостобудуванні для визначення форми та розміру різних компонентів мосту. Наприклад, форма арки в арочному мосту визначається за допомогою геометричних формул.

Тригонометрія використовується для обчислення кутів і відстаней у будівництві мостів. Наприклад, кути нахилу вантів у вантовому мосту розраховується за тригонометричними формулами.

Обчислення використовується для розрахунку швидкості зміни різних параметрів у конструкції мосту, наприклад швидкості зміни температури або швидкості зміни напруги в компонентах мосту.

Після зведення мосту, він потребує регулярного обслуговування, задля забезпечення його безперервного та безпечного використання. Технічне обслуговування мостів передбачає використання багатьох математичних рішень, включаючи статистичний аналіз і теорію ймовірностей.

Для аналізу даних, зібраних під час обстеження мостів, використовується статистичний аналіз, завдяки якому вдається виявляти приховані закономірності та тенденції даних. Наприклад, за допомогою статистичного аналізу можна визначити ділянки мосту, які найбільш схильні до корозії чи втоми. А теорія ймовірностей використовується для розрахунку ймовірності відмови різних компонентів моста. Наприклад, для розрахунку ймовірності відмови тросу вантового моста.

Математика відіграє вирішальну роль у проектуванні мостів, починаючи від співвідношення напруження та деформації до рівняння балки Ейлера-Бернуллі. Крім того, використання математичних рішень у будівництві таких споруд дозволило проектантам визначати виграшну форму та розміри різних компонентів конструкцій, а також розрахувати кути та відстані між його елементами. Використання обчислень дозволило інженерам розрахувати швидкість зміни різних параметрів у конструкції мостів, наприклад швидкість зміни температури або напруги в компонентах мостів.

Отже, підсумовуючи вище наведене, використання математичних формул і рішень зробило революцію в галузі мостобудування. Без впроваджених формул було б неможливо спроектувати та будувати мости, здатні витримувати екстремальні погодні умови та значне транспортне навантаження, яке необхідне для забезпечення логістики в наш час.

Література

1. «Математичні методи в будівництві мостів» Фен Фу та Яньфен Оуян (2018).

2. «Інженерна математика: програми та задачі» М. Дж. Т. Гая (2017).
3. Стоян Стоянов, Андрій Стригін та Микола Ганєв "Математичні моделі в мостобудуванні" (2016).
4. «Мости: їх проектування та планування» К. К. Шнайдера та Девіда П. Біллінгтона (1990).
5. «Математика, застосована до механіки суцільного середовища» Лі А. Сігеля та І. Н. Снеддона (1986).

П. Зозуля
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДЕЯКІ НЕВИРІШЕНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИКИ

У математиці завжди є багато невирішених питань та задач, які вчені намагаються розв'язати протягом багатьох років.

Проблеми тисячоліття (тобто задачі тисячоліття — це сім математичних проблем, визначених математичним інститутом Клея 2000 року, охарактеризовані як «важливі класичні задачі, розв'язання яких не знайдено впродовж багатьох років», за розв'язання кожної з них інститутом Клея запропоновано грошову винагороду у розмірі 1 000 000 доларів.

Анонсуючи приз, інститут Клея провів паралель із проблемами Гільберта які було визначено 1900 році та які спричинили істотний вплив на математику XX століття. У 1900 році на міжнародному математичному конгресі в Парижі Давид Гільберт оголосив 23 математичні проблеми, які, на його думку, слід було б розв'язати в XX столітті. На сьогодні 21 проблему з цього списку вже розв'язано, і тільки частина 8-ї проблеми — гіпотеза Рімана — ввійшла до переліку проблем тисячоліття.

Наприкінці XX століття математики намагалися сформулювати подібні стратегічні завдання на наступне XXI століття. Так, у травні 2000 році експерти математичного інституту Клея (Кембридж, Масачуссеч, США) відібрали сім найважливіших проблем сучасної математики. Кількість проблем у переліку (сім) було обрано виходячи з того, що засновник інституту, бостонський мільйонер Клей, виділив на премії сім мільйонів доларів — по мільйону за вирішення кожної проблеми.

Розглянемо їх.

Рівність класів P і NP

Питання полягає в тому, чи для всіх задач, для яких комп'ютер може швидко перевірити заданий алгоритм (тобто, протягом деякого часу), він також може швидко знайти цей розв'язок. Проблема рівності класів складності *P* і *NP* є однією з найважливіших проблем теорії алгоритмів і має багато далекосяжних наслідків у математиці, філософії й криптографії. Офіційна постановка задачі належить Стівену Куку.

Гіпотеза Годжа

Важлива проблема алгебраїчної геометрії. Гіпотеза описує класи когомологій на комплексних проективних многовидах, реалізовані алгебраїчними підмноговидами.

Гіпотеза Рімана

Гіпотеза стверджує, що всі нетривіальні нулі дзета функції Рімана мають дійсну частину 0,5. Її доведення або спростування буде мати далекосяжні наслідки для теорії чисел, особливо в частині розподілу простих чисел. Гіпотеза Рімана була частиною восьмої проблеми Гільберта.

Це одна з найвідоміших нерозв'язаних проблем у математиці. Вона стверджує, що всі нетривіальні нулі функції Рімана лежать на лінії, яку називають кривою Рімана.

Теорія Янга — Мілса

Задача походить із галузі фізики елементарних частинок. Потрібно довести, що для будь-якої простої компактної каліброваної групи G квантова теорія Янга — Мілса для простору R_4 існує й має ненульовий дефект маси. Це твердження відповідає експериментальним даним і чисельному моделюванню, однак довести його дотепер не вдалося.

Рівняння Нав'є — Стокса

Рівняння Нав'є — Стокса — це система рівнянь, що описують рух в'язкої рідини, одна з найважливіших задач гідродинаміки. Незважаючи на важливість задачі, існування гладких розв’язків зі скінченною кінетичною енергією математично не доведено. Вона стверджує, що розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса існує і єдиний для будь-яких початкових умов та граничних умов.

Гіпотеза Берча і Свіннертона-Даєра

Гіпотеза пов'язана з рівняннями еліптичних кривих і множиною їхніх раціональних розв'язків. Це питання виникло в геометрії. Вона стверджує, що будь-який гладкий 4-вимірний шар можна скрутити в точку без зміни форми.

Задача Платова - це питання, яке виникло в теорії чисел. Вона стверджує, що існує нескінченна послідовність простих чисел, яка містить скінченну кількість чисел, що утворюють арифметичну прогресію.

Ці невирішені проблеми та задачі викликають зацікавленість у математиків та дослідників у всьому світі до сьогоднішнього дня, і вони продовжують працювати над ними, щоб розв'язати ці нерозв'язані питання та задачі в математиці.

Література

1. *Anciaux H., Guilfoyle B.* On Three-Dimensional Blaschke-Lebesgue Problem (англ.) // Proceedings of the American Mathematical Society. - Providence : American Mathematical Society , 2011. - Vol. 139, no. 5 . - P. 1831 - 1839 . - ISSN 0002-9939 . - Doi : 10.1090/S0002-9939-2010-10588-9 . arXiv : 0906.3217.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

О.С. Водніцька
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин,*** *кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ШИФРУВАЛЬНА МАШИНА «ЕНІГМА»

Офіційно машина Енігма була винайдена Артуром Шербіусом у 1918 році, прямо наприкінці Першої світової війни. Після кількох років вдосконалення його винаходу перша машина побачила світ у 1923 році. Роком раніше він отримав права на патент голландського винахідника Гуґо Коха на подібний пристрій.

Це була досить велика машина типу друкарської машинки. З друкарськими машинами Енігма було багато проблем, до того ж вони були надзвичайно дорогими у виготовленні. З цієї причини Шербіус розробив машину, яка видавала свій результат на ламповій панелі, а не на папері. Машина містилася в дерев’яному корпусі та виглядала майже як пізніші моделі Енігма, за винятком того, що клавіші розташовані в послідовному порядку (ABCDE...), а не в більш звичайному порядку друкарської машини (QWERTZ...).

Машина Енігма складається з декількох частин, включаючи клавіатуру, плату, ротори та внутрішні електронні схеми. Деякі з них мають додаткові функції. Закодовані повідомлення були набором літер, які перетворювалися на зрозумілу пропозицію при розшифруванні.

Оскільки машина живилася від батарейок і тому була портативною, її взяли на озброєння німецькі збройні сили. Офіційні особи та війська Осі використовували машини Енігма для захисту своїх надсекретних радіоповідомлень під час Другої світової війни. Ці повідомлення, передані азбукою Морзе по бездротовій радіостанції, було легко перехопити, але їхнє шифрування за допомогою машин Енігма зробило їх незрозумілими.

Принцип роботи машини «Енігма»

Енігма представляла нову форму шифрування з використанням машин, а не ручних шифрів чи кодових книг. Вона була здатна генерувати 159 мільйонів мільйонів мільйонів комбінацій шифру за допомогою електромеханічної шифрувальної машини. Повідомлення, введені в машину, спочатку зашифровувалися рухомими механічними роторами, вписаними літерами, а потім роз’ємною платою електричних схем, що генерувало зашифрований текст. Шифрування залежало від початкового положення роторів, які можна було знімати, обертати та замінювати в будь-якому порядку. Текст, який видавала машина, був нерозбірливим, якщо отримувач не знав налаштувань ротора та плати роз’єму в день, коли був створений зашифрований текст. Оскільки знання налаштувань машини було ключем до розшифрування повідомлень, німці змінювали налаштування своїх машин Енігма щовечора опівночі. Щомісяця німецькі оператори машини Енігма отримували аркуш, із щоденними налаштуваннями для їхньої мережі.

Загальна кількість можливих налаштувань військової Енігми 1939р. – 159 962 555 217 826 360 000

Після натискання кожної кнопки ротори переміщуються і направляють струм по іншому шляху на іншу відкриту букву. Таким чином, для першого натискання клавіші генерується одне кодування, а при натисканні другої — інше. Це значно збільшує кількість можливих варіантів кодування, тому що кожен раз, коли на машині Енігма натискається клавіша, ротори обертаються, і код змінюється.

Коли натиснута клавіша на клавіатурі, один або кілька роторів переміщуються, щоб сформувати нову конфігурацію ротора, яка буде кодувати одну букву як іншу. Струм протікає через машину, і загоряється одна лампочка на платі ламп, яка показує вихідну букву. Приклад шифру “Енігми” виглядав так: якщо натиснута клавіша Р, а машина Енігма кодує цю літеру А, на панелі лампи загориться А.

Кожен ротор машини має 26 номерів або букв. Машина Енігма може використовувати три ротора за раз, але їх можна міняти, вибираючи з п’яти наборів, що призводить до тисяч можливих конфігурацій. Ключ до шифру “Енігма” складається з декількох елементів: ротори та їх порядок, їх початкові положення, схема зсуву та налаштування комутаційної панелі.

Недоліки способу шифрування “Енігма”

Головним мінусом шифру “Енігма” було те, що буква ніколи не могла бути закодована так, як вона є. Іншими словами, А ніколи не буде закодована як А. Це був величезний недолік у коді Енігма, тому що він давав частину інформації, яку можна було використовувати для дешифрування повідомлень. Якби дешифрувальники могли вгадати слово або фразу, які, ймовірно, з’являться в повідомленні, ця інформація допомогла б їм, щоб розгадати код. Оскільки німці завжди відправляли повідомлення про погоду на початку і зазвичай включали в кінці повідомлення фразу зі своїм традиційним привітанням, були знайдені фрази, які наблизили дешифрувальників до розгадки.

Література

1. https://www.cryptomuseum.com/crypto/enigma/hist.htm
2. http://www.teachinghistory100.org/objects/about_the_object/enigma_cipher_machine
3. https://bigbro.com.ua/shho-take-shifr-enigma-istoriya-opis/

А.В. Ільченко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАСТОСУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ У РЕАЛЬНОМУ ЖИТТІ

Раціональні функції (функції виду f(x) = p(x)/q(x), де p і q - многочлени) застосовуються в багатьох галузях життя. Вони є важливим інструментом в різних галузях науки, технології та побуту. Функції застосовуються у математиці, фізиці, інженерії, економіці та інших науках. Їх використовують для моделювання складних фізичних та економічних процесів, для розв'язання задач оптимізації, а також для побудови різних математичних алгоритмів та методів.

Раціональні функції мають широке застосування у реальному житті. Ось декілька прикладів:

1. Комп’ютерні науки: раціональні функції використовуються для моделювання різних алгоритмів та даних, таких як структури даних, алгоритми пошуку і сортування, та аналізу алгоритмів.

2. Медицина: раціональні функції використовуються для моделювання деяких фізіологічних процесів в організмі, таких як приток крові до серця і підтримка водно-сольового балансу.

3. Фізика: раціональні функції використовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, коливання та хвилі. Наприклад, функція Гука описує залежність сили, з якою пружина тисне або тягне тіло, від відстані, на яку вона розтягнута.

4. Фінанси: раціональні функції використовуються для моделювання та аналізу фінансових процесів, таких як рух цін на акції, валютний курс та облігації. Наприклад, функція ризику вкладень дозволяє оцінити ризик та потенційний дохід від інвестицій.

5. Механіка: раціональні функції використовуються для моделювання руху тіл і коливань у пружних системах.

6. Економіка: раціональні функції використовуються для моделювання попиту та пропозиції на товари та послуги, щоб прогнозувати ринкові тенденції та оптимізувати виробництво. Також вони використовуються для моделювання поведінки споживачів та фірм в умовах конкуренції.

7. Керування: раціональні функції використовуються для моделювання систем керування, таких як автоматичні регулятори та системи стабілізаціїю.

8. Електроніка: Раціональні функції застосовуються в проектуванні електричних кіл для зменшення впливу шумів та спотворень на сигнали, що передаються.

Загалом, раціональні функції показують відношення, які є співвідношенням один до одного. Вони застосовуються в різних аспектах нашого життя, особливо у визначенні часу, швидкості та тарифів.

О.В. Миськів
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико математичних наук,*
доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки

МАТЕМАТИКА ТА МИСТЕЦТВО

Математика та мистецтво - це дві різні галузі знань, проте вони можуть бути пов'язані між собою. Використання математичних методів та теорій у мистецтві може допомогти художникам створити більш складні та глибокі твори.

Один з основних математичних принципів, що використовуються в мистецтві - це геометрична симетрія. Геометрична симетрія - одна з теорій, яка може бути використана у мистецтві. Симетричні форми можуть відображати баланс та гармонію, яка може бути сприйнята як естетично приємна (рис. 1). Художники можуть використовувати геометричну симетрію для створення абстрактних творів або для створення реалістичних образів, які виглядають більш збалансовано та приємно для ока. Симетрія в мистецтві може допомогти художникам створити більш гармонійні та збалансовані композиції. Наприклад, симетричні форми можуть бути використані для створення складних мозаїчних візерунків або для створення враження рівноваги в картині.

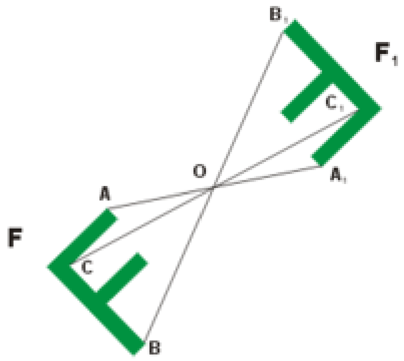


Рис. 1.

Ще один математичний принцип, який використовується в мистецтві - це теорія кольорів. Ще одна математична теорія, яка може бути використана у мистецтві. Кольори можуть відображати певний настрій та ефект в творі, що може бути використано для передачі почуттів та настрою. Кольори можуть бути поєднані за допомогою різних методів, які вивчаються у теорії кольорів. Це може допомогти художникам створювати більш глибокі та складні композиції, які можуть відображати їхні ідеї та почуття. Теорія кольорів вивчає взаємодію різних кольорів та їх відтінків. Наприклад, комплементарні кольори можуть використовуватися, щоб привернути увагу глядача та підсилювати враження від картини.

Фрактали - це ще один математичний принцип, який може бути використаний в мистецтві (рис. 2). Фрактали - це складні геометричні фігури, які складаються з більш простих частин, що повторюються. Це може створювати відчуття складності та структурованості, що може бути використано для створення вражаючих візуальних ефектів. Також може допомогти художникам створити більш складні та інтригуючі візуальні ефекти.

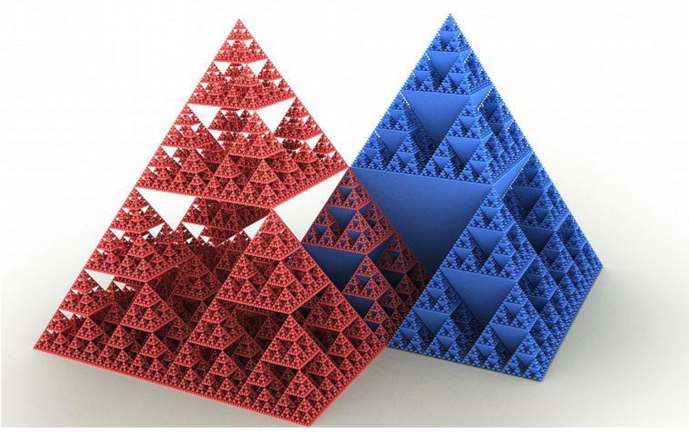


Рис. 2.

Усі ці математичні принципи можуть бути використані для того, щоб зробити мистецтво більш складним та глибоким. Використання математики у мистецтві може допомогти художникам створювати нові форми виразності та візуального сприйняття. Використання геометричних форм, кольорових комбінацій та фракталів може додати візуальної складності та інтриги до твору.

Також математика може допомогти художникам розвивати нові методи та техніки, що дозволять створювати більш складні та глибокі твори. Наприклад, використання математичних моделей може допомогти художникам розуміти, які форми та структури можуть бути створені з використанням різних матеріалів та технік.

У кінцевому підсумку, використання математики у мистецтві може допомогти художникам розвивати свої творчі здібності та створювати нові та оригінальні твори. В той же час, використання мистецтва у математиці може допомогти у викладанні та вивченні складних математичних концепцій та теорій.

Література

1. Математика та мистецтво [Електронний ресурс]. - Електронні дані. - Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Математика_та_мистецтво
2. http://www.mmf.lnu.edu.ua/en/leen/ta/1966
3. https://www.wiki-data.uk-ua.nina.az/Симетрія_в_математиці.html
4. https://www.creativosonline.org/uk/teoria-del-color.html

О. Ілечко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДЕЯКІ ВИЗНАЧНІ МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ

Історія математики багата на численні відкриття та досягнення, які змінили наше розуміння світу та поклали основи для розвитку наукових досліджень та технологій. Ось декілька прикладів таких відкриттів:

Числа Фібоначчі: ці числа були відкриті Леонардом Пізанським (відомим як Фібоначчі) у середині 13 століття. Вони прості у своїй формі, але вони з'являються в різних наукових та технічних дисциплінах, таких як біологія, фізика, економіка та інформатика. Розглянемо питання, що таке число Фібоначчі ? Отже, кожне число у послідовності Фібоначчі – це сума двох чисел, які передують йому. Отже, їх послідовність виглядає так: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 тощо. Математичне рівняння, що описує число Фібоначчі має вигляд:

$$x\text{n} + 2 = x\text{n} + 1 + x\text{n}$$

Число Фібоначчі часом називають "секретним кодом природи" та "загальним правилом природи". Кажуть, що дана послідовність «керує» розмірами усього, в тому числі Велику піраміду в Гізі, так і багато речей, з якими ми стикаємося кожного дня.

Диференціальне та інтегральне числення: ці дві області математики були розвинуті Готфрідом Лейбніцем та Ісааком Ньютоном у кінці 17 століття. Вони є основою багатьох наукових теорій та технологічних досліджень, включаючи фізику, інженерію, економіку та інформатику тощо. Диференціальне та інтегральне числення вивчає змінні, як геометрія вивчає форми геометричних тіл та їх властивості, а алгебра — операції та їх застосування для розв'язування рівнянь. Його широко застосовують у науці, економіці й інженерії, до того ж використовують під час розв'язання багатьох задач, для яких однієї алгебри недостатньо.

Теорія груп: ця галузь математики була розвинута в середині 19 століття Артуром Келлі та Камілло Йорданом. Вона використовується у фізиці, хімії, криптографії та інформатиці. Теорія груп — це розділ математики, який вивчає властивості груп. Група — це алгебраїчна структура з двомісною операцією, і для цієї операції виконуються такі властивості: асоціативність, існування нейтрального елемента, існування оберненого елемента. Поняття групи є узагальненням понять група симетрій, група перетворень.

Часто група може являти собою множину всіх перетворень (симетрій) деякої структури, оскільки результатом послідовного застосування двох перетворень (композицією) буде знову деяке перетворення, також можливі обернені перетворення, нейтральним елементом вважається відсутність перетворень.

Теорія ймовірностей: ця область математики була розвинута в кінці 17 та початку 18 століття Блезом Паскалем та П'єром де Ферма. Вона знайшла застосування в різних наукових дисциплінах, таких як фізика, економіка, статистика та інформатика. Як відомо, теорія ймовірностей — це розділ математики, що вивчає закономірності випадкових явищ: випадкові події, випадкові величини, їхні функції, властивості й операції над ними. Виникнення теорії ймовірностей як науки відносять до середньовіччя і перших спроб математичного аналізу азартних ігор. Спочатку її основні поняття не мали строго математичного вигляду, до них можна було ставитися як до емпіричних фактів, властивостей реальних подій, і формулювалися вони в наочних уявленнях. Найперші наукові праці в галузі теорії ймовірностей належать до XVII століття. Досліджуючи прогнозування виграшу в азартних іграх, Блез Паскаль і П’єр Ферма відкрили перші ймовірнісні залежності, що виникають під час кидання гральних кубиків.

Теорія множин: ця галузь математики була розвинута на початку 20 століття Георгом Кантором. Вона є основою для багатьох областей науки. Teóрія множи́н — розділ математики, в якому вивчаються загальні властивості множин (переважно нескінченних). Виділення теорії множин в самостійний розділ математики відбулося на рубежі XIX і XX століть. Теорія множин зробила дуже великий вплив на розвиток сучасної математики — вона є фундаментом низки нових розділів математики, дозволила по-новому поглянути на класичні розділи математики і глибше зрозуміти сам предмет математики. Сучасні дослідження теорії множин були започатковані Георгом Кантаром і Ріхардом Дедекіндом в 1870-х роках. Після відкриття парадоксів наївної теорії множин, на початку XX століття були запропоновані численні системи аксіом, серед яких найвідомішою є система Цермело-Френкеля з аксіомою вибору. До другої половини 19 століття поняття «множини» не розглядалося як математичне («множина книг на полиці», «множина людських чеснот» і т. д. — все це суто побутові мовні звороти). Становище змінилося, коли німецький математик Георг Кантор розробив свою програму стандартизації математики, в рамках якої будь-який математичний об'єкт мав бути тією або іншою «множиною». Цей підхід викладений у двох його статтях, опублікованих у 1879—1897 роках у відомому німецькому журналі .

Це є невеликий перелік математичних відкриттів, та дуже вагомих серед інших досягнень людства.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД -2014.

Ю.М. Баран
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О.Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАДАЧА ПРО ПАКУВАННЯ КУЛЬ

Задача про пакування куль — задача комбінаторної геометрії про розміщення однакових куль в евклідовому просторі без їхнього взаємного перетинання. Типова постановка задачі така: *знайти спосіб розташування куль в просторі, за якого кулі займають найбільшу частину цього простору.* Поставлена в 1500-х англійськими математиками. Розв'язана у 2016 році для 8-вимірного простору українською математикинею Мариною Вязовською.

Вперше задачу про пакування куль ще у 1611 році запропонував Йоганн Кеплер, німецький математик і астроном. Кеплер припустив, що найбільш щільний спосіб упаковки сфер вже і так застосовується — при укладанні гарматних ядер і фруктів: перший шар викладається кулями поруч одна з одною у вигляді шестикутника, другий в заглиблення на стиках куль нижнього шару і т. д. У великій тарі при такому варіанті укладання максимальна щільність буде близько 74 %. Це інтуїтивно найзручніший спосіб, коли нижній шар ядер просто складають поруч одне з одним, а наступні — у поглиблення на стиках куль нижнього шару. Але математично довести правильність цього припущення не виходило. Гіпотеза залишилася недоведеною аж до 1998 року, коли математик Томас Гейлс за допомогою комп’ютера перебрав усі можливі варіанти її доведення. Розв’язання вийшло дуже складним, викладеним на 300 сторінках тексту з використанням 50 000 рядків програмного коду. Але припущення підтвердилося. І задача для тривимірного простору була розв’язана.

Якщо ж припустити, що в просторі не три, а більше вимірів, складність розв’язання задачі зростає. Першим, хто розв’язав задачу у багатовимірному просторі стала українка Марина В’язовська. Причому – двічі. Самостійно — у восьмивимірному просторі та у співавторстві, — у 24-вимірному. Розв'язання В’язовської назвали «приголомшливо простим». Воно займає лише 23 сторінки.

Навіщо це потрібно?

Хоча складати ядра в трюми вже не так актуально, математичні рішення, зокрема й ті, які запропонувала Марина, знаходять застосування у написанні кодів для передачі сигналів для мобільного зв’язку, Інтернету чи космічних апаратів.

Чому розв’язання задачі із пакування сфер важливе для передачі даних? Завжди є перешкоди, тож при передачі даних (набору чисел) з однієї точки в іншу ми не знаємо, що ми отримаємо в кінці. Саме тому треба розбивати числа на групи. І розмежовувати їх. Тобто упакувати сфери максимально щільно, бо для передачі сигналу витрачається енергія, яка є дорогою.

Українка Марина В'язовська — друга в історії жінка, яка отримала медаль Філдса, найпрестижнішу відзнаку у математиці для молодих науковців.

В'язовську нагородили за розв'язання геометричної задачі про пакування сфер, над якою вона працювала впродовж кількох років.

Задача про найщільніше пакування куль в тривимірному просторі важлива не тільки для логістики гарматних ядер чи апельсинів, але й для кристалографії, хімії, нанотехнологій. Не дивлячись на те, що 8- та 24-вимірні простори здається людям, які далекі від математики, непотрібною абстракцією, отримані результати для багатовимірних просторів можуть використовуватися в досить неочікуваних областях – від теорії струн в теоретичній фізиці до теорії передачі інформації (кодування з виправленням помилок). Але, перш за все, це доведення дуже важливе для багатьох сфер саме математики.

Література

1. Задача про пакування куль. Електронний ресурс: https://uk.wikipedia.org
2. Марина В'язовська — про медаль Філдса та реакцію науковців на війну в Україні. Електронний ресурс: https://suspilne.media
3. Навіщо пакувати кулі? За що дали світову премію українському математику? Електронний ресурс: https://texty.org.ua
4. Рибченко, О. А. Задача Кеплера про найщільніше пакування куль : кваліфікаційна робота на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр» / О. А. Рибченко ; наук. керівник доктор фізико-математичних наук, проф. О. Г. Савченко ; Міністерство освіти і науки України ; Херсонський держ. ун-т, Ф-т комп'ютерних наук, фізики та математики, Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу. – Херсон : ХДУ, 2022. – 38 с. URI: http://ekhsuir.kspu.edu/123456789/16551

К.О. Кудринська
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ В МАТЕМАТИЦІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ

Серед усіх наук, що відкривають людству шлях
до пізнання законів природи, наймогутніша,
найвеличніша наука -– математика.
С. Ковалевська

Математика – це не тільки числа, формули, теореми, це, в першу чергу, наука, яка вчить логічно мислити, будувати логічний ланцюжок для вирішення поставленої проблеми, терпеливо йти до вирішення поставленої задачі і, навіть, якщо помилився – знайти помилку і отримати результат.

Сьогодні застосування математичних методів і знань, є скрізь. Математичні обчислення необхідні як для побудови космічного апарату, так і в повсякденному побуті.

Зв’язок математики з природничими дисциплінами полягає в тому, що математичні знання, вміння і навички, які здобувають суб’єкти навчання, слугують ґрунтовною основою для вивчення природничих дисциплін. Для природничих наук основним є експеримент і спостереження, а для математики – абстракція та ідеалізація.

Одним із перших прикладів використання математичного опису природи є створення календаря. Вавилонські жерці виявили кількість днів між повтореннями сонячних затемнень, це був результат тривалих спостережень у різних місцевостях, що математично обґрунтував ще Гіппарх (II ст. до н. е.).

Важливим є зв’язок математики з біологією, фізикою, хімією, медичними науками. За допомогою методу математичного моделювання, ознайомлення з різними процесами зводиться до вивчення властивостей математичної моделі, яка часто є системою рівнянь математичного опису процесів.

Наведемо приклади використання похідної функції при розв’язуванні деяких задач з біології та в медицини.

Приклад 1. Кількість бактерій у деякій біомасі змінюється за законом: $P(t)=4t^2+48t+125$. Скільки бактерій було у біомасі в початковий момент часу t=0? Яка швидкість приросту кількості бактерій в момент часу t=4,5 хв.?

Розв’язання:

В початковий момент часу t=0 кількість бактерій становила -125. Знайдемо швидкість приросту кількості бактерій:

$$v(t)=P'(t)=8t+48$$

$$v(4,5)=P'(4,5)=8\cdot 4,5+48=84 \text{ (бакт./хв.)}$$

Приклад 2. Реакції організму на два види ліків виглядають, як функції від часу (час виражено в годинах): $r_1(t) = te^{-2t}$ $r_2(t) = t^2e^{-2t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

Розв'язання: Знайдемо максимальну реакцію ліків кожного виду. Для цього знайдемо похідну кожної з функцій:

$r_1'(t) = (te^{-2t})' = e^{-2t} - 2te^{-2t}$, $r_2'(t) = (t^2e^{-2t})' = 2te^{-2t} - 2t^2e^{-2t}$

Знайдемо максимальне значення цих функцій:

$e^{-2t} - 2te^{-2t} = 0$, $2te^{-2t} - 2t^2e^{-2t} = 0$

$e^{-2t}(1-2t) = 0$ $2te^{-2t}(1-t) = 0$

$t = \frac{1}{2}$ $t = 0,\ t = 1$

$t_1(\max) = 0{,}5,\ t_2(\max) = 1$. В результаті отримаємо: $r_1(0{,}5) \approx 0{,}184$ $r_2(1) \approx 0{,}135$. Отже, в ліків першого виду максимальна реакція вища. Повільніше діють ліки другого виду.

Математика в сучасних природничих науках – це не лише обчислення, а й найбільш затребувана мова для формулювання основних законів, які поза нею не можуть бути визначені.

Література

3. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
4. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 200 с.
5. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

І.М.Чіпчик
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

НАЙПРОСТІША НЕВИРІШЕНА МАТЕМАТИЧНА ЗАДАЧА: ТЕОРЕМА КОЛЛАТЦА

Теорема Коллатца або теорема $3n+1$ (інші назви «Теорема Улама», «Теорема Какутані», «Алгоритм Хасса» та багато інших) математична задача виведена німецьким математиком Лотаром Коллатцом, який прийшов до цієї ідеї в 30-х роках XX століття. Сьогодні є однією з найпростіших невирішених математичних задач яку ніхто не може ні підтвердити ні спростувати.

Для пояснення суті гіпотези розглянемо наступну послідовність чисел, яка називається Сіракузькою послідовністю. Беремо будь-яке натуральне число n. Якщо воно парне, то ділимо його на 2, а якщо непарне, то множимо на 3 і додаємо 1 (отримуємо 3n + 1). Над отриманим числом виконуємо ті ж самі дії, і так далі.

Наприклад, для числа 3 отримуємо:

3 — непарне, $3 \times 3 + 1 = 10$
10 — парне, 10:2 = 5
5 — непарне, $5 \times 3 + 1 = 16$
16 — парне, 16:2 = 8
8 — парне, 8:2 = 4
4 — парне, 4:2 = 2
2 — парне, 2:2 = 1
1 — непарне, $1 \times 3 + 1 = 4$

Очевидно, що, починаючи з 1, починають циклічно повторюватися числа 1, 4, 2.

Наприклад для числа 27 послідовність доходить до числа 1 тільки після 111 кроків, досягнувши пікового значення 9232.

Гіпотеза Коллатца полягає в тому, що яке б початкове число ми не взяли, рано чи пізно ми отримаємо одиницю. Проте довести це ще не вдалось, тому що для цього потрібно перевірити всі відомі математиці числа. Сьогодні перевірено не менше 295 147 905 179 352 825 856 чисел і відомо, що довжина нетривіального циклу становить не менше 17087915 кроків до того доки цикл не перейде в замкнутість 1, 4, 2.

У серпні 2009 року на платформі BOINC був запущений проєкт добровільних розподілених обчислень «Collatz Conjecture», метою якого є перевірка гіпотези Коллатца на великих числах. Обчислювальний модуль проєкту може використовувати обчислювальні потужності сучасних відеокарт для одночасної обробки і вирахування послідовностей.

Гіпотеза виявиться неправильною в двох випадках:

1. Якщо знайдеться число, яке в результаті дійде до нескінченності.

2. Якщо знайдеться послідовність яка створить свій замкнутий цикл, відмінний від 4, 2, 1.

Цікавішим ситуацію робить те, що якщо ми візьмемо від'ємні числа то сформуються щонайменше 3 замкнуті незалежні цикли, що починаються на числа -1, -17, -5. Це при тому, що за від'ємні числа ще ніхто серйозно не брався, і це означає, що таких циклів може бути набагато більше. Тому перед математиками постає питання, чи така послідовність не може утворитись з будь-яким великим додатнім числом, яке вчені ще не перевірили.

Як висновок можемо сказати, що гіпотеза Коллатца це математична задача, котра швидше за все ще не скоро знайде своє підтвердження тому, що в ній немає жодної систематичності та мало хто за неї береться серйозно. Як казав видатний математик Пол Ердош "Математика ще не дозріла для вирішення таких математичних задач". Тому математикам залишається і надалі битись над підтвердженням або спростуванням цієї гіпотези.

Література

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Гіпотеза_Коллатца
2. https://youtu.be/QgzBDZwanWA
3. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

Ю.О. Лень
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

БЕЗ МІРНОЇ ЛІНІЙКИ, АБО ВИМІРЮВАННЯ ГОЛИМИ РУКАМИ

Припустимо, що необхідно щось виміряти, а під рукою немає нічого. Людина у своєму житті може виміряти будь-які довжини і відстані, не користуючись вимірювальними приладами.

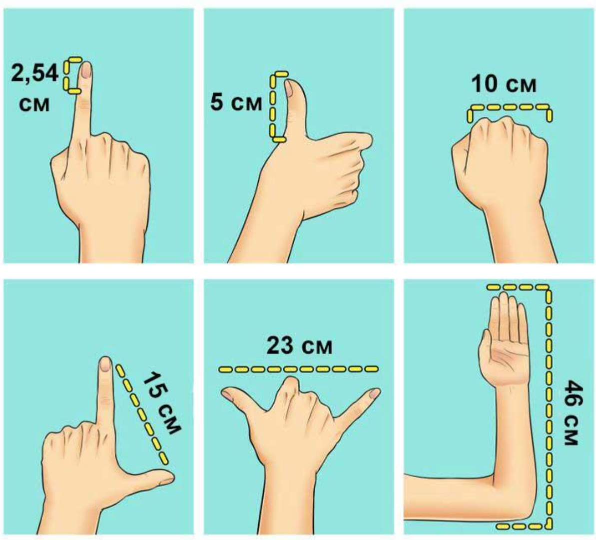
Перші одиниці виміру величин були не надто точними. Наприклад, відстані вимірювалися кроками. Звичайно, у різних людей величина кроку різна, але брали деяку середню величину. Для вимірювання великих відстаней крок був занадто дрібною одиницею. Тому в Стародавньому Римі для таких вимірів служила миля (це шлях в 1000 подвійних кроків, і правою, і лівою ногою).

Однією з найпоширеніших одиниць довжини був лікоть. Тобто відстань від ліктя до кінця середнього пальця, але лікті у різних людей мають різну довжину, тому в кожному місті правий цар видавав указ, яким ліктем повинні користуватися всі його піддані.

Мірна лінійка не завжди виявиться під руками, і корисно вміти обходитися як-небудь без неї. Міряти довгі або короткі відстані найпростіше кроками. Для цього потрібно знати довжину свого кроку. Звичайно, кроки не завжди однакові, але все ж ми можемо знати їх середню довжину. Для цього треба виміряти довжину багатьох кроків разом і обчислити звідси довжину одного.

В теорії все зрозуміло, а на практиці був такий експеримент: виміряти довжину машини. Вимірявши довжину кроку за допомогою рулетки. Він дорівнює 70 см. Довжина машини з технічного паспорту = 431 см. За вимірами, довжина машини дорівнює 6 кроків, тобто 420 см.

Вимірюємо відстань за допомогою нашої руки



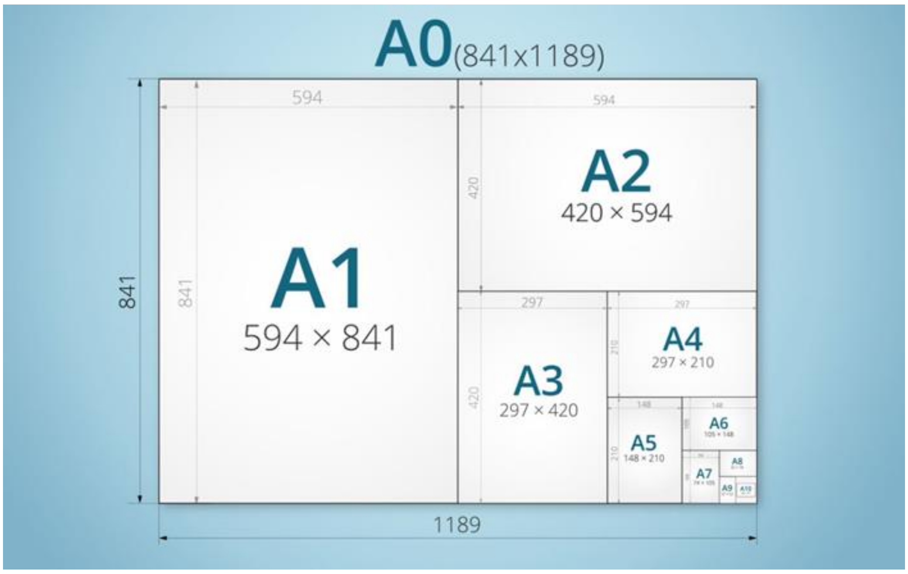
Вимірюєм відстань за допомогою купюри чи банківської картки

- 5 гривень – 118 мм х 63 мм;
- 50 гривень – 136 мм х 72 мм
- 200 гривень – 148 мм х 75 мм

Якщо ви не любите носити в гаманці готівку, то однозначно маєте банківську чи кредитну картку. Тож запам’ятайте, що **стандартна картка** має розміри: 8,5 см ширини та 5,4 см висоти.

За допомогою аркуша

Розміри сучасного аркуша паперу А4 визначаються стандартом ISO 216 Міжнародної системи паперових стандартів. Тож звичайний аркуш **А4** мав би мати: 210 мм на 297 мм.



М. А. Думас
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **І. В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Інтеграл є одним з основних понять математики, яке має велике практичне значення. Розуміння основних понять та властивостей інтегралів дозволяє нам аналізувати складні функції та моделювати реальні явища. Використання інтегралів в різних застосуваннях допомагає нам розраховувати різноманітні величини, вирішувати практичні задачі та здійснювати дослідження в різних наукових галузях.

Означення визначеного інтеграла. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \longrightarrow 0$ і не залежить ні від способу розбиття [a; b] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається визначеним інтегралом від функції f(x) на проміжку [a; b] і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Визначений інтеграл може бути застосований для знаходження довжини дуги кривої на площині. Для цього можна використовувати формулу довжини дуги кривої, відому як формула Лагранжа-Ейлера.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$$

Цей метод застосовується, наприклад, в геометрії для знаходження довжини дуги деякої кривої лінії, такої як дуга кола, еліпса, або будь-якої іншої кривої форми, яка може бути виражена аналітично за допомогою функції. Застосування визначеного інтеграла для обчислення об'єму тіла обертання відоме як метод об'ємних інтегралів. Цей метод дозволяє знайти об'єм тіла, яке утворюється в результаті обертання певної кривої навколо осі координатної площини. Розглянемо це застосування на прикладі обчислення об’єму тора.

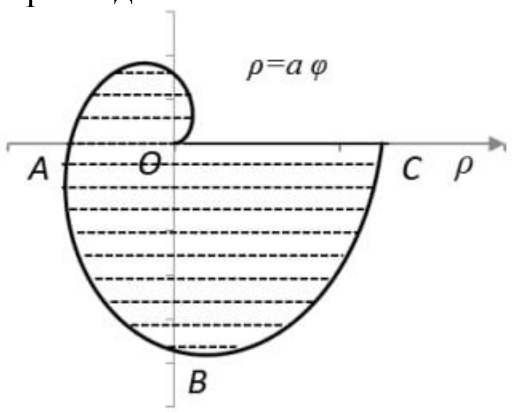
В медицині визначений інтеграл може застосовуватись для розрахунку дози лікарських засобів. Це може включати обчислення кількості лікарського засобу, яка повинна бути призначена пацієнту в залежності від різних факторів, таких як вік, стать, вага, стан здоров'я та інші. Використання визначеного інтеграла в медицині дозволяє більш точно розрахувати дозу лікарського засобу, враховуючи різні фактори, такі як фармакокінетика, фармакодинаміка, характеристики пацієнта та інші, що може допомогти покращити результати лікування та знизити ризик виникнення побічних ефектів.

Припустимо, що ви маєте лікарський засіб, концентрація якого в крові змінюється з часом згідно з функцією C(t) = C0 * e^(-kt), де C0 = 100 мг/мл є початковою концентрацією після введення дози, k = 0.05 1/год - константа розпаду, та t1 = 0 год та t2 = 4 год - моменти часу, для яких вам потрібно розрахувати дозу лікарського засобу.

Вам потрібно визначити дозу лікарського засобу, яку необхідно призначити пацієнту, щоб забезпечити концентрацію лікарського засобу в крові 50 мг/мл в момент часу 4 год.

$$\int_0^4 100e^{-kt}dt \approx 362.6 \text{ мг.}$$

Інтеграл також застосовується в статистиці та теорії випадковості для обчислення ймовірностей випадкових подій, обчислення функцій розподілу випадкових величин, розрахунку очікуваних значень та моментів, обчислення функцій щільності ймовірності, а також для регресійного аналізу.
Інтеграл може бути використаний для обчислення площі фігури, заданої в полярній системі координат. Для цього можна використати визначений інтеграл, де функції, що описують радіус і кутову координату, будуть використовуватись як інтегранти. Інтегрування таких функцій з відповідними межами дозволить знайти площу фігури в полярній системі координат. Детальніше розглянемо це застосування для знаходження площі фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда.



$$S_{OABC} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Узагальнюючи, застосування інтеграла в різних галузях, таких як медицина, статистика, випадкові події та геометрія, дозволяє вирішувати різноманітні завдання, включаючи обчислення доз лікарських засобів, визначення ймовірності певних подій, вимірювання величин, таких як довжина дуги або об'єм тіла обертання, а також знаходження площі фігур, заданих в різних системах координат. Використання інтеграла в цих контекстах відкриває широкі можливості для розуміння та вирішення різноманітних завдань у наукових, технічних, медичних та інших прикладних областях.

Література

1. А. Ф. Бермант. Короткий курс математичного аналізу. 1965р.
2. https://naurok.com.ua/viznacheniy-integral-yogo-vlastivosti-obchislennya-i-zastosuvannya-187524.html
3. https://yukhym.com/uk/integruvannya/znaity-dovzhynu-duhy-v-priamokutnykh-koordynatakh.html

М.О. Попчук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***І.В. Шевчук,*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Похідна - це математична функція, яка визначає, як швидко змінюється значення іншої функції в певній точці. Іншими словами, похідна показує нахил кривої функції в даній точці.

Наприклад, якщо ви маєте залежність швидкості автомобіля від часу, то його похідна показує, як швидко змінюється швидкість автомобіля в кожний момент часу. Це може допомогти зрозуміти, чи рухається автомобіль рівномірно або з прискоренням.

Похідною функції $y = f(x)$в точціx_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Поняття похідної виникло у XVII столітті у зв'язку з необхідністю розв'язати деякі математичні і фізичні задачі. Але відкриттю похідної і основ диференціального числення передували роботи таких великих вчених як П'єра Ферма та Рене Декарта. Так у "Початках" Евкліда описано спосіб побудови дотичної до кола, Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, Аполлоній - до еліпса, гіперболи і параболи. Однак давньогрецькі вчені не вирішили задачу до кінця, тобто не знайшли загального методу, придатного для побудови дотичної до будь-якої плоскої кривої в даній точці. Перший загальний спосіб побудови дотичної до алгебраїчної кривої був викладений у "Геометрії" Декарта.

Більш загальним і важливим для розвитку диференціального числення був метод побудови дотичних Ферма. Але сам термін «похідної» і позначення ввів Жозеф Лагранж. Задачу про побудову дотичної розв'язав Г. Лейбніц, про визначення миттєвої швидкості під час прямолінійного нерівномірного руху – І. Ньютон, який прийшов до поняття похідної, виходячи з положення механіки. Результати своїх досліджень І. Ньютон виклав у трактаті «Метод флексій», опублікованому в 1736 році.

Похідна є одним з основних понять математичного аналізу та широко використовується в різних галузях науки та техніки. Ось кілька прикладів, як використати похідну в реальному житті:

Фізика: Похідна є важливим поняттям в фізиці, оскільки дозволяє розраховувати швидкість, прискорення та інші фізичні параметри. Наприклад, для розрахунку швидкості тіла можна використовувати похідну функції пройденого шляху по часу.

$v(t) = s'(t)$ – швидкість – це перша похідна від рівняння руху;

$a(t) = v'(t)$ – прискорення – це друга похідна від рівняння руху або ж перша від рівняння швидкості.

Кожен з нас зустрічав такий випадок: два учні граються м'ячем, кидаючи його один одному. За допомогою похідної спробуємо обчислити якої найбільшої висоти досягає м'яч, коли від одного гравця до другого він летить 2 сек.

Як відомо, рівняння зміни координати y в проекції на вісь y має вигляд: $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Швидкість зміни координати y знайдемо як похідну $y'(t) = v_0 - gt$. У найвищій точці ця швидкість дорівнюватиме 0, тому $v_0 - gt = 0$, звідки $v_0 = gt$. За такого значення початкової швидкості $y(t) = gt^2 - \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}$. Оскільки найбільшої висоти м'яч досягне через одну секунду руху, то $y_{max} = \frac{9{,}8 \cdot 1^2}{2} = 4{,}9$м.

За допомогою похідної можна розрахувати потужність, силу, силу струму, ЕРС індукції.

Інженерія: Похідна є важливим інструментом в проектуванні та тестуванні різноманітних пристроїв. Наприклад, вивчення залежності напруги від часу у складних електричних системах може бути виконано з використанням похідної.

Медицина: Похідна може використовуватися для аналізу росту та змін відносної ваги людини в часі, для розрахунку швидкості зміни рівня глюкози в крові, а також для вивчення динаміки розповсюдження захворювань.

Економіка: Продуктивність праці – це похідна від обсягу виробленої продукції по часу.

Загалом, похідна дозволяє розуміти, як змінюється функція у відповідь на зміни її вхідних параметрів. Це може бути корисно в багатьох сферах життя, де потрібно розраховувати та передбачати зміни величин, що залежать від різних факторів.

Література

1. Вища математика в прикладах і задачах / Клепко В.Ю., Голець В.Л.. — 2-ге видання. — К. : Центр учбової літератури, 2009. — С. 238. — 594 с.
2. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 11 класу. – К.: «Зодіак-Еко»,2002. – 315 с.
3. Бурда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. Математика. Пробний навчальний посібник для учнів шкіл, ліцеїв та гімназій гуманітарного профілю 10-11 кл. – К.: «Освіта», 2001. – 204 с.

І.М. Клим'юк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Задача чисельного інтегрування полягає в обчисленні визначеного інтегралу:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a; b] і відома її первісна F, то справедлива формула Ньютона – Лейбніца $\int_a^b (x)dx = F(b) - F(a)$.

Проте цією формулою неможливо скористатися, якщо первісну F не можна виразити у відомих (традиційно в елементарних) функціях, або якщо функцію f задано таблично або графічно. У цих випадках необхідно будувати методи для наближеного обчислення визначених інтегралів. Найчастіше застосовують квадратурні формули. У всіх перерахованих випадках для обчислення інтеграла використовують чисельні методи. Традиційний підхід полягає в тому, що функцію f (x) на відрізку [a,b] замінюють інтерполяційною функцією φ(x), наприклад, поліномом Лагранжа або Ньютона, а потім приймають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R(x)$$

де R(x) – деяка похибка формули інтегрування.

Графічна інтерпретація чисельного визначення інтеграла показана на рисунку 1.

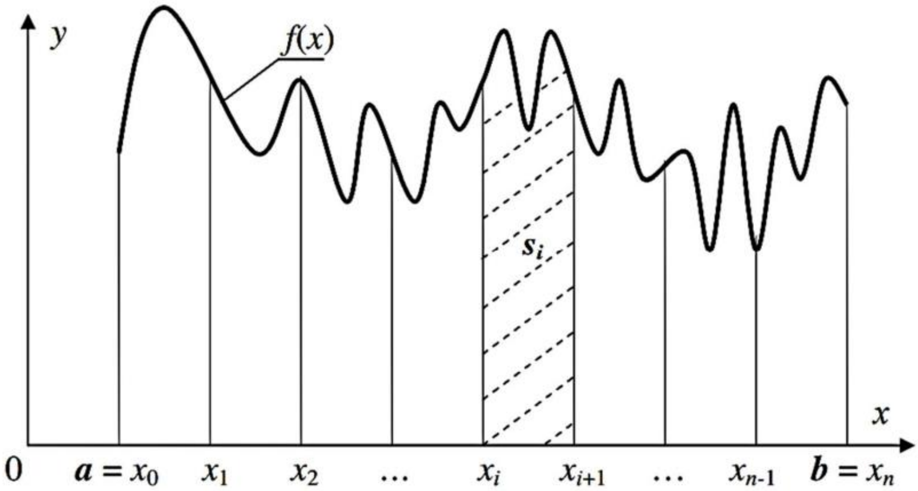


Рис.1. криволінійні трапеції для інтегрування

Обчислимо значення визначеного інтеграла за формулою Сімпсона для n=8, оцінимо похибку результату, склавши таблицю скінчених різниць.

$$I = \int_{1,2}^{1,6} \frac{sin(2x-2,1)}{x^2+1} dx$$

Знаходимо h=(b-a)/n=(1,6-1,2)/8=0,05

Обчислення значень функцій, а також додавання значень функції, які мають однакові коефіцієнти у формулі, робимо в такій таблиці:

i	x_i	$2x_i - 2{,}1$	$sin(2x_i - 2{,}1)$	$x_i^2 + 1$	$y_0 y_8$	$y_1 y_3 y_5 y_7$	$y_2 y_4 y_6$
0	*1,20*	*0,3*	*0,29552*	*2,44*	*0,1211*		
1	*1,25*	*0,4*	*0,28942*	*2,5625*		*0,1520*	
2	*1,30*	*0,5*	*0,4794*	*2,69*			*0,1782*
3	*1,35*	*0,6*	*0,5646*	*2,8225*		*0,2000*	
4	*1,40*	*0,7*	*0,6442*	*2,96*			*0,2176*
5	*1,45*	*0,8*	*0,7174*	*3,1024*		*0,2312*	
6	*1,50*	*0,9*	*0,7833*	*3,25*			*0,2410*
7	*1,55*	*1,0*	*0,8415*	*3,4025*		*0,2473*	
8	*1,60*	*1,1*	*0,8912*	*3,56*	*0,2503*		
Сума					*0,3713*	*0,8305*	*0,6368*

Отже, I≈(0,05)/3*(0,3714+4*0,8305+2*0б6368)=0,05/3*4,9670≈(0,88278)

Для оцінки точності одержаного результату складемо таблицю скінчених різниць функції до четвертого порядку.

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	*0,1211*	*0,0309*	*-0,0047*	*0,0003*	*-0,0001*
1	*0,1520*	*0,0262*	*-0,0044*	*0,0002*	*0,0000*
2	*0,1782*	*0,0218*	*-0,0042*	*0,0002*	*0,0000*
3	*0,2000*	*0,0176*	*-0,0040*	*0,0002*	*0,0001*
4	*0,2176*	*0,0136*	*-0,0038*	*0,0003*	*-0,0001*
5	*0,2312*	*0,0098*	*-0,0035*	*0,0002*	
6	*0,2410*	*0,0063*	*-0,0033*		
7	*0,2473*	*0,0030*			
8	*0,2503*				

Оскільки$max|\Delta^4 y_i| = 0{,}0001$, то залишковий член формули:

$$R_{\text{залишковий}} < \frac{(b-a)\times max|\Delta^4 y_i|}{180} \approx \frac{0{,}4\times 0{,}0001}{180} \approx 0{,}0000003$$

Оскільки обчислення проводились з чотирма значущими цифрами, то величина залишкового члена на похибку не впливає.

Похибку обчислень оцінено із співвідношенням:

$$\Delta I = (b-a)\Delta_y \leq 0{,}4 \times 0{,}0001 < 0{,}00005$$

Отже, одержані чотири десяткові знаки вірні. Слід зазначити, що якщо необхідно чисельно обчислити значення інтеграла (8.1) із заданою точністю, то для цього потрібно якимось чином визначити відповідне значення n. Можна було б скористатися оцінками (8.3) або (8.5), але для цього потрібно оцінити максимальне значення модуля 2-ї (для формули трапецій) або 4-ї (для формули Сімпсона) похідної на відрізку [a, b], що може виявитися достатньо важким або зовсім неможливим.

Література

1. Бойко Л.Т., Основи чисельних методів: навч. посібник. - Д.: Вид-во ДНУ, 2009. - 244 с.
2. Давидов Н.А., Курс математичного аналізу/Н.А. Давидів. -К.: Вид-во "Вища школа", 1976. -378 с.
3. Демидович Б.П., Марон І.А. Основи обчислювальної математики. - М.: Вид-во "Наука" - "Фізматліт", 1979. - 664 с.
4. Канторович А. В., Крилов В.І. Наближені методи найвищого аналізу. - М: Вид. Фізико-математичної літератури, 1962. - 708 с.

СЕКЦІЯ 3. Історія математики

О.С. Ніколаєва
ВСП «Львівський фаховий коледж Львівського національного університету природокористування»
Науковий керівник: ***О. Л. Чопик,*** *викладач математики*

МАТЕМАТИКА У «ШОТЛАНДСЬКІЙ КАВ’ЯРНІ» СТАРОГО ЛЬВОВА

Метою даної роботи є можливість доторкнутись до історії математики через призму часу, познайомитись з представниками Львівської математичної школи, яка була у трійці кращих математичних шкіл світу у ХХ столітті у воєнний та повоєнний період, а також математичною реліквією «Шотландською книгою», у якій записувались математичні проблеми того часу.

Методи дослідження - теоретичний аналіз наукової літератури; систематизація та узагальнення досліджуваної наукової інформації.

Сутність дослідження. На проспекті Шевченка 27 у місті Львові працює Szkocka Restaurant&Bar, де колись було Математичне кафе (Шотландська або Шкоцька кав’ярня) . Все колись відбувалося саме тут, у кав’ярні, а не в стінах респектабельних академій, тут зародилися основи сучасної математики, тут збирались професори, доценти і доктори Львівської Політехніки та Університету Яна Казимира, щоб годинами сперечатися про математику.

Історія "Шкотської кав'ярні" пов’язана з життям всесвітньо відомого математика – Стефана Банаха, завдяки якому у 30–х рр. постала математична школа.

Спочатку математики писали формули на столах чи серветках, що дуже дратувало власника закладу. Тоді, за однією з версій, дружина Банаха (за іншою– один з офіціантів закладу) придбали велику записну книгу, яка в подальшому стала відома у світовій науковій спільноті, як «Шкотська книга».

Перший запис був зроблений саме Стефаном Банахом 17 липня 1935, а останній–31 березня 1941 року. За цей час було записано 193 проблеми. Стефан Банах записав у цю книгу 14 проблем та ще 11 - разом зі Станіславом Мазуром і Станіславом Улямом.

За вирішення задач давали нагороди. Перші нагороди були досить скромними, наприклад, кілька пляшок пива або пляшка вина.

Найоригінальніший приз вигадав Станіслав Мазур – це був живий гусак! Птах був вручений шведському математику Перу Енфло, який вирішив проблему номер 153 через 36 років після її появи, а приз йому вручав сам Мазур.

Стефан Банах народився у Кракові 30 березня 1892 року Він ніколи не вчився в університеті (був самоуком), але незважаючи на це став професором у віці 35 років! З 1922 року Стефан Банах розпочинає працювати у Львівському університеті і стає четвертим професором математики на математико - природничому факультеті.

Енциклопедичні терміни: Банаховий простір, узагальнена межа Банаха, Банахова алгебра — з'явились саме у «Шкотській кав’ярні». В 1932 році написано статтю, що змінила розвиток математики, «Теорія лінійних операцій», яку було перекладено майже всіма мовами світу.

Загальна кількість публікацій Банаха виносить 58 позицій, з них 6 посмертних публікацій. Хоча функціональний аналіз був основною ділянкою праці Банаха і результати в цій галузі принесли йому світову славу, але він мав великі заслуги і в інших ділянках математики. До них належать теорія функцій, теорія ортоґональних рядів, теорія міри і теорія множин.

У 1929 р. було видано перші підручники Банаха для середніх і вищих шкіл. Загалом він є автором і співавтором 10 шкільних підручників. Для вищої школи він написав підручники з диференціального та інтегрального числення, механіки і теорії функцій дійсної змінної. Український переклад підручника з механіки опубліковано у 2017 р. у видавництві Львівської політехніки.

Станіслав Мазур: учений-романтик, львів’янин, якого Банах ввів в коло своїх наукових досліджень. Він є автором (або співавтором) біля 50 проблем, що записані у книзі, і які зробили значний вплив на розвиток функціонального аналізу. Більше нього проблем сформулював Станіслав Улям

Саме Станіслав Улям , один з лише двох студентів, які користувалися привілеєм і були в групі обраних у кафе. За місяць до вторгнення нацистів молодий вчений залишив батьківщину. Згодом став професором Гарвардського університету і винахідником водневої бомби.

Ще один представник математичної школи – це Гуґо Штайнгауз.
Математика зобов'язана йому значним внеском в теорію ймовірностей, а до появи генетичного аналізу суди встановлювали або виключали батьківство саме за допомогою тесту Штайнгауза, що використовував метод теорії ймовірностей для визначення того, наскільки конкретний чоловік може бути батьком конкретної дитини. А сам Штейнхауз у своїх спогадах стверджував, що «найбільшим відкриттям його життя став Стефан Банах».

«Шкотська книга” вціліла завдяки зусиллям Луції Банах, яка перевезла книгу до Вроцлава, де в той час проживав Штейнхауз. Зараз оригінал книги є власністю Інституту математики Польської академії наук і зберігається в Центрі Банаха у Варшаві.

У Szkocka Restaurant&Bar зберігається копія цієї книги. Зокрема, є нові дві книги з 2015 року, де зроблені записи відвідувачами ресторану.

21 травня 2021 року математичне товариство Львова відкрило інформаційну таблицю на фасаді ресторану з нагоди 85-річчя створення «Шкотської книги» та відзначення внеску Львівської математичної школи у розвиток світової математики.

Література

1. Вельдбрехт Д.О. Токар Н.Г. Декада математики в школі. – Харків « Основа» 2003
2. Банах Т., Притула Я. Математичні публікації НТШ до 1939 року. Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. 2015. Т. 12. С. 130—146.
3. Банах С. Механіка. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2017
4. Лянце В. Коли деканом був Стефан Банах. Математика сегодня. 1992. Вип. 7. С. 211—215.
5. Маріуш Урбанек. Геніальні. Львівська математична школа. Вид-во: ВНТЛ- Класика, 2016, 336с.
6. Улям С. «Пригоди математика». Літопис , 2021.

Р.П. Грень
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ УЯВНИХ ЧИСЕЛ

Математика появилась як спосіб висловлювати світ в числах: міряти ділянки землі, передбачати рух планет, вести облік товарів. Пізніше ми зіткнулись з проблемою, здавалось, що в деяких задач немає розв'язків. І щоб справитися з ними відокремили математику від реального світу, роз'єднали алгебру та геометрію. Придумаємо такі дивні числа, що назвемо їх уявними.

В 1494 році Лука Пачолі, який вчив математики самого Леонардо Да Вінчі, публікує свою роботу з математики під назвою «Сума арифметики, геометрії, дробів, пропорцій і пропорційності». Повний збірник математичних знань зі всієї Італії епохи Ренесансу. Один з розділів присвячений кубічним рівнянням. Сьогодні ми би записали їхню загальну форму як: $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$. На пошуки загального розв'язку такого виду рівнянь людство потратило як мінімум чотири тисячі років. Пачолі зробив висновок, що найти розв'язок просто неможливо. Багато людей просто підставляють потрібні числа у формулу не підозрюючи, що стародавні математики найшли її рішення за допомогою геометрії. В ті часи привичних нам рівнянь ще не було, вирази записувалися за допомогою слів і малюнків. Тисячоліттями математики не підозрювали про існування від`ємних розв'язків для подібних рівнянь. Тому що вони привикли працювати з реальним світом. Вони собі не уявляли, наприклад, квадрат зі стороною мінус шість. В математиці того часу від`ємних чисел просто не існувало.

Сципіон дель Ферро приблизно в 1510 році находить надійний метод для рішення неповних кубічних рівнянь. Він нікому не розказував про своє відкриття і лише перед самою смертю в 1526 розкрив таємницю своєму учневі, Антоніо Фіору. Після його смерті, Фіор кидає виклик математику Нікколо Фонтана Тартальї. Кожному з учасників було відведено 40 днів на розв`язок 30 різних задач з неповними кубічними рівняннями. У результаті, Фіор не розв`язав жодного, а Тарталья – усі 30 рівнянь усього за дві години. Знаючи, що знайти розв`язок цілком можливо, і усвідомлюючи, що вирішується його майбутнє, Тарталья відчайдушно почав шукати розв`язок кубічних рівнянь. Він взяв за основу геометричний підхід для квадратних рівнянь і переніс його в три виміри. Так Тарталья другий у всьому світі навчився вирішувати неповні кубічні рівняння. Він придумав і записав загальний алгоритм покрокову інструкцію, але не у вигляді математичної формули яку ми привикли бачити, а у формі вірша. Джироламо Кардано дізнається секретний алгоритм Тартальї і вирішує знайти загальне рішення повного кубічного рівняння, і йому це вдається. Пізніше він натрапляє на вирішення в зошиті Сципіона дель Ферро і через три роки в 1545 виходить "Ars Magna". Це прекрасна праця і в процесі роботи Кардано зіткнувся з деякими рівняннями, які йому не вдавалося вирішити звичним чином. Наприклад $\boldsymbol{x^3 = 15x + 4}$, якщо йти по алгоритму то на виході ми отримаємо квадратні корені із від`ємних чисел. Кардано повертається до геометричного рішення задачі, щоб зрозуміти де саме виникає проблема. І виникає геометричний парадокс. В нас є деяка частина квадрата з площею 30, але зі сторонами по 5. Площа всього квадрата дорівнює 25, але для цього площа відсутнього фрагмента квадрата повинна бути від`ємною.

Після 10 років роботу Кардана продовжив Рафаель Бомбеллі. Він розуміє, що квадратним коренем з від`ємного числа не може бути ні від`ємне, ні додатнє число, він допускає що це якийсь новий вид чисел. Він пропонує виразити два доданки у розв`язку Кардано як комбінацію звичайного та цього нового типу чисел, який містить квадратний корінь від`ємного числа. Так він з`ясовує, що кубічні корені у рівнянні Кардано дорівнюють 2 плюс або мінус квадратний корінь із -1. Він додає їх, квадратні корені скорочуються і залишається правильна відповідь 4. І метод Кардано працює, якщо відокремити його від геометрії.

З часом математика набуває звичний нам вигляд, залишивши у минулому довгі описи з ілюстраціями. Геометрія більше не є єдиним джерелом істини. Рене Декарт починає активно використовувати квадратні корені від`ємних чисел, популяризує їх та починає називати їх уявними числами. Пізніше Ейлер вводить латинську букву «і» на позначення квадратного кореня з -1. Уявні числа в комбінаціях з дійсними утворюють комплексні числа. Пряма уявних чисел знаходиться перпендикулярно прямої дійсних і разом ці прямі утворюють комплексну площину. Множення на «і» - це поворот на 90°. При функції e^{ix} ми постійно множимо на «*i*» рухаючись по осі *x*. Отримується спіраль, якщо дивитися на дійсну частину спіралі, то це косинусоїда. А якщо глянути на уявну частину, то це синусоїда. Виходить, що уявні числа, відкриті як необхідний проміжний крок, для рішення кубічних рівяннь стали в основі нашого розуміння реальності.

Література

1. Dunham, W. (1990). Journey through genius: The great theorems of mathemathics. New York. – https://ve42.co/Dunham90
2. Toscano, F. (2020). The Secret Fornula. Princeton University Press. – https://ve42.co/Toscano2020
3. Muroi, K. (2019). Cubic equations of Babylonian mathematics. https://ve42.co/Murio21
4. Branson, W. Solving the cubic with Cardano, - https://ve42.co/Branson2014
5. Rothman, T. (2013). Cardano v Tartaglia: The Great Feud Goes Supernatural. – https://ve42.co/Rothman
6. Vali Siadat, M., & Tholen, A. (2021). Omar Khayyam: Geometric Algebra and Cubic Equations. Math Horizons, - https://ve42.co/Siadat21

В.В. Штаєр
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЯК МНОЖИЛИ В СТАРОДАВНІЙ РУСІ

Математика стародавньої Русі мала прикладний, ужитковий характер. Знання з математики використовувалися під час будівництва та у торгівлі. Актуальною була проблема мір та ваги, пов'язана з торгівлею, монетною системою, і з побутовими потребами. Підробка еталонів вважалася за найтяжчий злочин і каралася смертю. Стародавня Русь знала і реально застосовувала різні принципи хронологічних обчислень: сонячні та місячні роки, індикти (п'ятнадцятирічні періоди, так зване Велике коло, Метонів цикл тощо), робилися розрахунки при складанні церковних календарів.

У накопиченні математичних знань провідну роль відігравали практичні потреби. Це обумовило вивчення чотирьох арифметичних дій, дробів, обчислення процента, площі круга. Причому у вимірюваннях використовувалися засоби, дані людині від природи: долоня, п'ядь (відстань між витягнутими великим і середнім пальцями), лікоть, сажень (відстань між витягнутими руками). Множили оригінально, дотепно, застосовуючи лише 3 дії: ділення на 2, множення на 2 і додавання.

Щоб перемножити, наприклад, числа 267 і 38, одне з них - будь-яке ділять на 2 (з відкиданням остачі) і продовжують ділення на 2 до одержання 1, записують результати стовпчиком, а інше число множать і повторно множать на 2, записуючи результати другим стовпчиком.

: на 2	• на 2
38	~~267~~
19	534
9	1068
4	~~2136~~
2	~~4272~~
1	8544
	10146

У стовпці множення на 2 закреслюють числа, що перебувають поруч із парними числами зі стовпця ділення на 2. Додають числа, що залишилися незакресленими і результат готовий: 267 * 38=10146.

Дивний спосіб! Виглядае як якийсь фокус... Проте має математичну основу (пов'язану із двійковою системою числення), про яку, зрозуміло, ні найменшого уявлення не мали прості люди з народу, які застосовували такий спосіб множення. Його винахід - прояв чисто народної творчості, інтуїції й природної кмітливості давньоруських селян.

Не виключено, що у ті ж далекі часи хтось скорочував процедуру множення, оперуючи не двійкою, а трійкою. Наприклад, помножити 147 на 89 він міг би так:

• на 3	: на 3	Остача
147	89	-1
~~441~~	30	0
1323	10	+1
~~3969~~	3	0
11907	1	+1
11907+1323-147=13083		

Пояснення. Якщо остача від ділення на 3 дорівнює 2, то частку беремо з надлишком і у стовпці залишків пишемо-1 (89: 3 = 30, остача -1). Для отри мання остаточного результату, у стовпці множення на 3 додаємо числа, що стоять у рядках з остачею +1 і віднімаємо числа, що стоять у рядках з остачею-1. Сприймайте сказане тут просто як згадку про гідний захоплення епізод з історії розвитку культури лічби на Русі. Ті, хто задумається над матемп- тичним обгрунтуванням безвідмовної дії цього самобутнього давньоруського алгоритму множення (без знання таблиці множення більш ніж на 2 і на 3), безсумнівно отримають інтелектуальне задоволення.

Література

1. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник.Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.

2. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник.Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

3. Тацій Р.М., Чмир О.Ю., Карабин О.О. Схема дослідження поздовжніх коливань стрижняз чотирьох кусків кусково-сталого перерізу Збірник наукових праць ДОРОГИ І МОСТИ.– 2019. – № 19. – С. 151 – 166.

Д. Бень
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

КОРОТКА ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИКИ

Математика — одна з найдревніших наук. Перші математичні уявлення і поняття людина формувала в глибокій давнині, розв'язуючи найпростіші задачі практичного характеру. Ускладнювалися форми трудової діяльності, і перед людиною поставали складніші задачі, для розв'язування яких вона формувала нові математичні поняття, створювала математичні теорії. Отже, математика розвивалася під впливом двох головних стимулів: потреб практичної діяльності людини і логіки розвитку самої математики.

За періодизацією видатного математика А. М. Колмогорова математика пройшла чотири основні періоди розвитку.

1. *Зародження математики* — від глибокої давнини до VI—V ст. до н. е., тобто до того часу, коли математика стає самостійною галуззю теоретичного знання зі своїм власним предметом і методом.

2. *Елементарна математика* — від VI—V ст. до н. е. до кінця XVI ст. У цей час формувалися основні теорії, що стосуються математики сталих величин. У надрах математики сталих величин зароджувалися і розвивалися ідеї, які на кінець XVI ст. привели до створення передумов відкриття аналітичної геометрії і аналізу нескінченно малих — двох основних дисциплін класичної вищої математики. Вони вивчають вже не стани, а закономірності змінних величин.

3. *Створення математики змінних величин* — кінець XVI — середина XIX ст. На початку цього періоду французький учений Р. Декарт створює аналітичну геометрію, а англійський учений І. Ньютон і німецький учений Г. Лейбніц — аналіз нескінченно малих. За невеликий проміжок часу до середини XIX ст. у математиці склалися майже всі математичні теорії, які нині називають *класичними основами сучасної вищої математики*.

4. *Сучасна математика* характеризується швидким зростанням об'єму просторових форм і кількісних відношень. У зв'язку з цим розширилася сфера застосування математики, виникло багато нових математичних теорій, які привели до створення електронних обчислювальних машин. Останні стали потужним знаряддям дослідження глибинних закономірностей природи і розв'язування найскладніших задач у різних галузях практичної діяльності людини. У кожний період історії науки видатні математики були першовідкривачами невідомих раніше теорем, розв'язків задач, за якими часто відкривалися нові горизонти науки.

Математика в Україні:

Ще з доісторичних часів математика почала свій розвиток і в Україні. В часи Київської Русі на землях сучасної України вже використовувалися деякі відомості з арифметики та геометрії.

У 1576 було засновано Острозьку академію, в якій викладали традиційні для середньовічної Європи сім вільних наук, що включали арифметику і геометрію.

У 1659 році була заснована Києво-Могилянська академія. Там до ординарних класів належала математика, зокрема алгебра, геометрія, оптика, діоптрика, фізика, гідростатика, гідравліка, архітектура, механіка, математична хронологія. Викладати вищу математику в академії почав Феофан Прокопович.

Також від часу заснування Львівського університету у 1661 році викладалась математика на філософському факультеті. У 1744 році в університеті відкрито окрему кафедру математики.

Із заснуванням університетів почала розвиватися математична наука у Східній Україні — у Харкові (1805), Києві (1834), Одесі (1865), які мали фізико-математичні відділи. У 1844 році відкрито Технічну академію у Львові. У 1875 році засновано Чернівецький університет. У 1873 році у Львові створено Наукове товариство імені Т. Шевченка, в яке входило Математично-природознавчо-лікарська секція, а у 1879 створено Харківське математичне товариство, у 1889 — Київське фізико-математичне товариство. У 1918 році урядом Скоропадського засновані Українська академія наук і Дніпропетровський університет, який мав фізико-математичний факультет. У 1920-30 роках сформувалась Львівська математична школа. Львівська або шотландська математична школа — група математиків, які жили в місті Львові між 1918 та 1939 роками, працювали разом, періодично збиралися в «Шотландській кав'ярні» (Kawiarnia «Szkocka») для обговорення різних математичних проблем. Засновниками Львівської Математичної Школи були Гуґо Штейнгауз та Стефан Банах. Видавали журнал «Математичні студії», який було засновано в 1929 році. 13 лютого 1934 року було створено Інститут математики.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. ІІ.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

М. Побережник
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВИНИКНЕННЯ АЛГЕБРИ ТА ГЕОМЕТРІЇ

Виникнення алгебри

Термін «алгебра» походить від назви твору Мухаммеда аль-Хорезмі «Альджебр аль-мукабала» (IX століття), що містить загальні методи вирішення задач, які зводяться до рівнянь 1-й і 2-го степеня.

До середини XVII століття в основному склалася сучасна алгебраїчна символіка. Аж до XVIII століття під алгеброю розумілася наука про буквені обчислення — тотожні перетворення буквених формул), вирішення рівнянь 1-го — 4-го степенів, логарифми, прогресії, комбінаторика. В даний час всі ці розділи алгебри прийнято називати елементарною алгеброю.

У XVIII-XIX століттях предмет алгебри — це перш за все вивчення многочленів, теорії алгебраїчних рівнянь з одним невідомим, теорії систем лінійних рівнянь з декількома невідомими, а також теорія матриць та визначників.

Третій (сучасний) етап розвитку алгебри як науки про алгебраїчні операції почався в середині XIX століття і був пов'язаний з появою різноманітних прикладів алгебраїчних операцій над об'єктами зовсім іншої природи, ніж дійсні числа. Першими такими прикладами були множення підстановок та операції над комплексними числами.

Виникнення геометрії.

Виникнення геометрії сягає глибокої давнини і було обумовлено практичними потребами людської діяльності (необхідністю вимірювання земельних ділянок, вимірювання об'ємів різних тіл і т. д.).

Найпростіші геометричні відомості і поняття були відомі ще в Давньому Єгипті. У цей період геометричні твердження формулювалися у вигляді правил, які приймалися без доведення.

З VII століття до н. е. по I століття н. е. геометрія як наука бурхливо почала розвиватися в Стародавній Греції. У цей період відбувалося не тільки накопичення різних геометричних відомостей, а й відпрацьовувалася методика доведення геометричних тверджень, а також робилися перші спроби сформулювати основні первинні положення (аксіоми) геометрії, з яких чисто логічними міркуваннями виводиться безліч різних геометричних тверджень. Рівень розвитку геометрії в Стародавній Греції відображений у творі Евкліда «Начала».

У цій книзі вперше була зроблена спроба дати систематичну побудову планіметрії на базі основних невизначених геометричних понять і аксіом (постулатів).

Особливе місце в історії математики займає п'ятий постулат Евкліда: «Якщо на площині при перетині двох прямих третьою сума сума внутрішніх односторонніх кутів менше 180 градусів, то ці прямі при продовженні рано чи пізно перетнуться з тієї сторони, з якої ця величина (сума) менше 180 градусів».

Довгий час математики безуспішно намагалися вивести п'ятий постулат з інших постулатів Евкліда і лише в середині XIX століття завдяки дослідженням М. І. Лобачевського, Б. Рімана і Я. Бояї стало ясно, що п'ятий постулат не може бути виведений з інших, а система аксіом, запропонована Евклідом, не є єдиноможливою.

«Начала» Евкліда справили величезний вплив на розвиток математики. Ця книга протягом більш ніж 2-х тисяч років була не тільки підручником з геометрії, але і служила відправним пунктом для дуже багатьох математичних досліджень, в результаті яких виникли нові самостійні розділи математики.

Спадщина Евкліда пережила вченого на цілих 200 століть, і служила джерелом натхнення для таких особистостей, як, наприклад, Авраам Лінкольн. З чуток, Лінкольн завжди забобонно носив при собі «Начала», і в усіх своїх промовах цитував роботи Евкліда.

Систематична побудова геометрії зазвичай проводиться за таким планом:
1. Перераховуються основні геометричні поняття, які вводяться без визначень.
2. Дається формулювання аксіом геометрії.
3. На основі аксіом та основних геометричних понять формулюються інші геометричні поняття і теореми.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.
2. ЛБелл Е. Т. Творці математики . - М .: Просвітництво , 1979. - 256 с.
3. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

І.В. Садолінський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ УЯВНИХ ЧИСЕЛ

1494 рік, Лука Пачолі, вчитель Леонардо да Вінчі, публікує трактат "сума арифметики" - найповнішу збірку математичних знань епохи ренесансу. Один із розділів присвячений кубічним рівнянням, сьогодні ми б записали їхню загальну формулу як "$ax^3+bx^2+cx+d=0$". Пачолі зробив висновок, що знайти розв'язок неможливо. У ті часи звичних нам рівнянь ще не було, вирази записували за допомогою слів і малюнків. Тисячоліттями математики не підозрювали про існування від'ємних розв'язків для подібних рівнянь. Але було шість варіантів побудованих таким чином, щоб усі коефіцієнти залишалися додатніми. Те саме стосувалося і кубічних рівнянь. Але, роками пізніше італійський математик Нікколо Тарталья взяв за основу геометричний підхід для квадратних рівнянь і переніс його в три виміри.

Візьмемо рівняння "$x^3+9x=26$; "x^3" можна уявити у вигляді куба зі стороною "x"; якщо додати до нього певний об'єм, що дорівнює "$9x$", - вийде 26; за аналогією квадратного рівняння нам потрібно збільшити об'єм одного куба на "$9x$". Уявімо, що ми подовжили його сторони на якесь значення, у нас вийшов куб більшого об'єму зі стороною "z", що дорівнює "$x+y$", таким чином, наш початковий куб виявляється ніби обкладений з різних боків іншими фігурами; у нас є три прямокутні призми з розмірами "$x \cdot x \cdot y$", три призми менші з розмірами "$x \cdot y \cdot y$", а ще маленький куб зі стороною "y". Тарталья з'єднав шість прямокутних призми в один паралелепіпед зі сторонами "$3y$", "$x+y$", тобто "z", і висотою "x". Об'єм цієї фігури дорівнюватиме "$3yz$" на висоту "x". Він розуміє, що ця фігура відповідає доданку "$9x$" з рівняння, якщо його основа, тобто "$3yz$" дорівнює дев'яти, тому він приймає "$3yz$" за "9", тепер, якщо зібрати наш великий куб, бракує лише маленького кубика зі стороною "y", а значить, додавши "y^3" до обох частин рівняння, ми можемо налаштувати нашу фігуру, у нас виходить, що "z^3", тобто великий куб, дорівнює "$26+y^3$", два рівняння та два невідомих. Знаходимо чому дорівнює “z” з першого, підставляємо це значення в друге, отримуємо "$y^6+26y^3=27$", якщо уявити, що змінні - це не “y”, а "y^3", рівняння перетворюється на звичайне квадратне, то ми вже знаємо, що "y^3" - це 1, а отже, "$y=1$"; "z" - це "$3:y$", тобто "3"; "$x+y=z$", отже, "x" - це два, що підходить як розв'язок нашого рівняння. Ось так Тарталья навчився розв'язувати наведені кубічні рівняння, а щоб не доводилося щоразу проробляти всі ці геометричні обчислення з кожним новим прикладом, Тарталья вигадав і записав докладну інструкцію.

Тарталья став зіркою, математики всіма способами намагалися довідатися секрет розв'язання кубічних рівнянь, особливо наполегливим був Джероламо Кардано, якому вдалося заставити Тарталью розкрити секрети. Кардано одразу ж починає експериментувати, але в нього є конкретна мета - знайти загальний розв'язок для повної версії кубічного рівняння, і йому це вдалося.

Якщо в рівнянні зробити "$x=x-b:3a$", то всі "x^2" скоротяться, отже, будь-яке повне кубічне рівняння можна привести до тієї форми, яку розв'язують методом Тартальї. В процесі роботи Кардано зіткнувся з низкою кубічних рівнянь, які йому не вдавалося розв'язати звичним чином, наприклад: "$x^3=15x+4$", якщо йти за алгоритмом, то на виході ми отримаємо квадратні корені з від'ємних чисел. Кардано повертається до геометричного розв'язання задачі, щоб зрозуміти, де саме виникає проблема, перші етапи: добудовування об'єму і прикладання фігур чудово вдаються, але коли настає час додавати квадрат, якого не вистачає - виникає геометричний парадокс, ми маємо певну частину квадрата з площею, що дорівнює 30, але сторонами завдовжки по 5, площа всього квадрата дорівнює 25, але для цього площа фрагменту, якого бракує, повинна бути від'ємною, звідси й виникає квадратний корінь з від'ємних чисел, через від'ємну площу.

Задача: знайдіть два числа які в сумі дають 10, а при множенні 40. Їх можна об'єднати в одне квадратне рівняння "$x^2+40=10x$", але, застосувавши формулу для розв'язування, ми побачимо, що у відповіді з'являються квадратні корені з від'ємних чисел, закономірний висновок: розв'язку в цього рівняння немає. Математики того часу думали, що поява коренів з від'ємних чисел - вірна ознака того, що розв'язку немає, але це кубічне рівняння інший випадок. Можна виявити, що “4” цілком підходить для значення "x", чому ж до цієї відповіді не вдасться дійти у спосіб, що працює для решти кубічних рівнянь Кардано характеризує ідею про корені з від'ємних чисел, як цікаву, але даремну.

Приблизно через 10 років роботу Кардано продовжив італійський інженер Рафаель Бомбеллі. Розуміючи, що квадратним коренем з від'ємного числа не може бути ні додатне, ні від'ємне число, він припускає, що це якийсь новий особливий вид чисел, він пропонує виразити доданок рівняння в складовій формі, комбінації звичайного числа і числа, що містить квадратний корінь з мінус одиниці, так виходить "$2=\pm\sqrt{-1}$", залишається скласти частини, і квадратні корені скорочуються, залишаючи правильну відповідь - чотири.

Від'ємні площі, яких не існує в реальному світі, неминучі як проміжний етап розв'язання. За коріння з від'ємних чисел береться сам Рене Декарт, що додає їм популярності. Пізніше Ейлер введе латинську "i" для позначення "$\sqrt{-1}$". Числа, що складаються з уявної та дійсної частини, називають комплексними. Як виявилося, кубічні рівняння - це тільки початок.

Виходить, що уявні числа, відкриті як необхідний проміжний крок на шляху розв'язання кубічних рівнянь, виявилися в основі нашого розуміння реальності.

Література

1. Tamara Smith (2021). Уявні числа: властивості, додатки, приклади. https://uk.warbletoncouncil.org/numeros-imaginarios-13549

2. Як уявні числа врятували математику (2022). https://www.youtube.com/watch?v=xJR8oL7UtQY&t=919s&ab_channel=VertDider
3. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594

Л.Романів
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЧИСЛО Е

Число Ейлера, або число е - це добре відома математична константа, яка часто зустрічається у численних наукових та економічних додатках, поряд із числом π та іншими важливими числами в математиці. Це число ірраціональне, що означає, що воно має нескінченну кількість знаків після коми без повторюваного зразка. Його числова величина - 2,71828... Можна сказати, що е - це число, до якого наближається сума $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$

Перші 20 знаків числа е такі: е ≈ 2,71828182845904523536… Щоб запам'ятати їх, необхідно помітити, що після цифри 7 двічі записано 1828, а потім — кути рівнобедреного прямокутного трикутника. Першим запровадив символ е Л. Ейлер. Йому належить так багато відкриттів, пов'язаних з числом е, що зрештою число е стали називати «числом Ейлера».

Уявіть, що ви поклали 1000 гривень на депозит в банку, який виплачує дуже щедрі відсотки – 100 % річних. Через рік у вас буде 2000 гривень. Через рік, ви просите банк, щоб він виплачував відсотки раз на пів року, тобто після шести місяців перші 50%, а в кінці року – другі 50%. Ви однозначно тутвиграєте, але наскільки сильно? Ваша початкова ставка 1000 грн, за перші пів року помножиться на 1,5 і за другі пів року ще раз на 1,5. Тоді, через рік, у вас буде 2250 гривень, а не 200 гривень.

А що буде, якщо ви вмовите банк поділити рік на ще більше періодів: на дні, години, хвилини? У вас буде спавжнє багатство?

Щоб результати були наочніші поділимо рік на 100 рівних періодів з виплатою 1% в кінці кожного періоду. Тоді гроші будуть множитися на 1,01 в сотому степені, і це буде приблизно 2,70481. Отже, ви отримаєте 2704,81 грн. І, якщо відсоток буде нараховуватися нескінченно часто, то ви отримаєте 2718,28 грн. Точна відповідь – 1000 гривень помножені на е, де е – границя, яка виникає в цьому процесі: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=2.71828...$

Неймовірним тут є те, що чим частіше виплачуються відсотки, то повільніше зростає кількість грошей протягом кожного періоду, але за рік ви все одно отримаєте значну суму. Це і є ключем до того, чому *e* є повсюди.

Ще розглянемо використання *e* , де поєднано випадковість і неймовірну кількість варіантів вибору.

Уявіть, що в кінотеатрі показують популярну комедію. Це романтичний фільм, і біля каси вишикувалась черга із сотень закоханих пар (більше, ніж кінотеатр може вмістити), які відчайдушно хочуть потрапити на сеанс. Коли пара, якій пощастило, купує квитки, вона йде всередину і займає два місця поруч.

Щоб спростити все, припустимо, що вони вибирають місця як прийдеться, де є вільні. Інакше кажучи, їм неважливо - сидіти ближче до екрана чи далі від нього, біля проходу чи в середині ряду. Їм досить того, що вони поруч. Також припустимо, що жодна пара не посунеться, щоб інша теж могла сісти. Коли пара сіла - усе. Ні про яку ввічливість не йдеться. У касі це знають, тому коли вільними лишаються тільки поодинокі місця, квитки перестають продавати. А інакше почнуться скандали. Спочатку, коли кінотеатр ще практично пустий, усе прекрасно. Кожна пара знаходить собі два місця поруч. Але незабаром лишаються тільки поодинокі місця - самотні, непридатні для життя, мертві зони, які пара зайняти не може. У реальному житті люди свідомо облаштовують такі буферні зони – наприклад, щоб було куди покласти пальто, або щоб не ділити підлокітник із неприємним незнайомцем. Однак, у цій моделі порожні місця з'являються випадково. У випадку з кінотеатром, де на один ряд приходиться багато крісел, відповідь буде така:

$$\frac{1}{e^2} = 0{,}135$$

тож у нікуди підуть приблизно 13,5 відсотка сидінь. Якби всі пари сиділи поруч і заповнювали простір ідеально ефективно, наче сардини в банці, то порожніх місць не було б.

Отже, число *e* дуже важливе в математиці та багатьох інших галузях, пов’язаних з виробництвом, наукою та повсякденним життям. Це число відіграє дуже важливу роль в області обчислення і є частиною багатьох фундаментальних результатів, таких як границі, похідні, інтеграли, ряди тощо. Крім того, він має набір властивостей, які дозволяють використовувати його для визначення виразів, які мають важливе застосування в багатьох областях людського знання.

Література

1. Стівен Строгац. Екскурсія математикою. «Наш формат» Київ -2019.
2. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

Н.І.Нікітенко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПАРАДОКСИ ЗЕНОНА

Зенон Елейський – філософ Стародавньої Еллади, учень засновника Елейської школи – Парменіда. Жив з 515 по 450 рік до нашої ери. Про його життя відомо дуже мало. Народився в місті Елеї в південній частині Італії. Прославився завдяки своїм апоріям, у вигляді яких був сформульований знаменитий парадокс Зенона. Апорії Зенона являють собою парадоксальні міркування, саме ж слово «апорія» з грецької мови означає «безвихідність».

Розглядаючи логічні парадокси, можна переконатися в тому, що саме стародавні греки вперше сформували багато парадоксів. Вони ж свого часу змогли докопатися до безлічі парадоксальних явищ, які пов'язані із перебігом часу.

Напевно, одним із найкращих винахідників у цьому питанні став Зенон. Найвідоміший його парадокс- це парадокс про бігуна.

Суть парадоксального явища, описаного Зеноном, полягає в тому, що бігуну, який біжить марафон, міркує і доходить висновку про те, що перш ніж він добіжить до фінішу, йому необхідно пробігти половину дистанції, потім половину половини, що залишилася, і так щоразу. У своїх міркуваннях бігун дійшов до розуміння існування нескінченної множини половин відстаней, які йому необхідно пробігти. Інакше кажучи, бігун ніколи не досягне фінішу.

Інший знаменитий парадокс Зенона — «Стріла». Його суть: стріла, яка летить, насправді стоїть на місці. Тут формально-логічно обґрунтована неможливість помислити рух без пастки протиріччя: в польоті стріла летить і водночас перебуває у спокої, оскільки кожної миті польоту займає тотожне собі місце у просторі; оскільки час складається з множини «зараз» чи «тепер», то стріла є непорушною відносно себе. В апорії «Стадій» йдеться про однакові тіла, що рухаються з однаковою швидкістю у протилежних напрямках повз нерухомі тіла: тоді виникає парадокс, коли пройдена ними одинична відстань начебто рівна подвійній.

Вважають, що філософові належить міркування: чим ширше коло наших знань, тим більшою є дотична межа до «океану незнання», який оточує зростаючий «острівець» відомого; отже, мірою збільшення знань — більшає і незнання. Вплив цієї апорії фіксується, зокрема, у вченні К.Поппера про фальсифікованість (можливість заперечення) знання.

Протягом тривалого часу вчені детально аналізували парадокси, придумані Зеноном. Однак повністю прийти до їхнього розуміння й пояснення помилок стало можливим лише після того, як була створена теорія нескінченних множин Георга Кантора.

Ця теорія дозволяє розглядати будь-які нескінченні множини у тому числі множину точок на прямій або множину митей часу, не як ізольовані набори точок і подій, а як щось ціле. Суть парадоксів Зенона, розглянутих нами вище, саме й зводиться до того, що ні множину точок на прямій, ні множину часових проміжків неприпустимо розглядати як множини, що складаються з нескінченної кількості ізольованих один від одного складників.

Парадокси Зенона далеко не вичерпують весь перелік парадоксальних явищ пов'язаних із перебігом часу й розвитком навколишнього світу в рамках часового потоку. Описані нами явища - лише початок на великотрудному шляху їхнього пошуку й подолання. Можна припустити, що з розвитком знань людини про таке багатогранне й складне явище, яким є час, кількість відкритих і вивчених парадоксів збільшуватиметься.

Література

1. Кротов І.С. Книга "Гімнастика для розуму: Логічні задачі та головоломки.-Донецьк: ТОВ ВКФ "БАО" 2007" ст. 158-159

2. https://vue.gov.ua/Апорії_Зенона

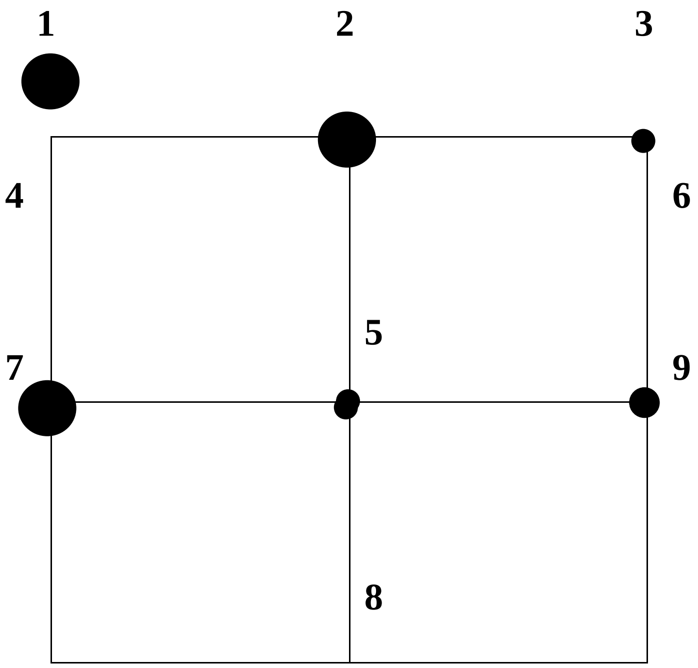
3. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

В. А. Климець
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ХРЕСТИКИ-НУЛИКИ ЗА ОВІДІЄМ ТА ШЕКСПІРОМ

Хрестики-нулики (також відомі як кріс-крос) - це гра, в яку грають двоє гравців, використовуючи дошку з дев'ятьма квадратами (три в ряд і три в стовпчик). Гравці чергуються розміщувати хрестики або нулики на дошці з метою отримання трьох символів в ряд, стовпчику або діагоналі.

Про деякий варіант цієї, відомої з давніх пір гри, згадується у творі Овідія. Шекспір у комедії "Сон у літню ніч" посилається на "Nine Men's Morris" як на першоджерело.



Ігрове поле – квадратна сітка з дев'ятьма "вузлами" - точками. Грають двоє. У першого гравця 3 чорні фішки, у другого – 3 білі фішки. Гравці по черзі ставлять фішки, по одній, на незайняті вузлові точки. Перемагає той, кому вдасться викласти свої три фішки в одну пряму лінію.

Якщо виставлені шість фішок не принесли перемоги нікому, то, продовжуючи дотримуватись послідовності ходів, гравці пересувають свої фішки на сусідню, незайняту точку.

Наприклад, у положенні, зображеному на малюнку, якщо наступний хід "білих", вони можуть пересунути фішку з точки 8 у точку 9. Тепер ніяким своїм ходом "чорні" не зможуть перешкодити зробити черговий хід фішкою з поля 5 на поле 6 і перемогти.

Припустимо, обоє гравців однаково вміло ведуть гру, - чим закінчиться гра: 1) обов'язково виграє той, хто робить хід першим, 2) обов'язково виграє той, хто робить хід другим. 3) ніхто не виграє.

Розв'язок: Виграє той, хто робить хід першим, якщо першою ж фішкою займе центральну точку.

Якщо гравець, який починає персування фішок, не займе центральну точку, то це миттєво зробить другий гравець, але й у цьому випадку ще можливий нічийний результат.

Основна стратегія в цій грі - ставити свій символ в такий спосіб, щоб запобігти опоненту створювати лінію з трьох однакових символів, а також шукати можливості створення власної лінії.

Ось деякі загальні тактики, які можуть допомогти виграти у хрестики-нулики:

1. Початковий хід. Якщо вам доводиться починати гру, поставте свій символ у середину дошки, це дозволить вам зайняти центральну позицію та отримати більше можливостей для створення ліній.
2. Захист від "вилки". Один зі способів перемогти в грі - створити "вилку", тобто ситуацію, коли можна створити дві лінії одночасно. Щоб уникнути цього, ставте свій символ так, щоб запобігти опоненту створити пару символів в одному рядку або стовпці.
3. Захоплення кутів. Якщо ви займаєте кутові позиції, це дозволить вам створити дві можливі лінії, а також ускладнює опоненту планувати свої ходи.
4. Перехід на атаку. Якщо ви займаєте перевагу в грі, наприклад, створили дві лінії, перейдіть на атаку та почніть створювати нові лінії, запобігаючи опоненту.
5. Пошук "пастки". Спробуйте створити "пастку" для опонента - створіть ситуацію, коли йому єдиний доступний хід може дозволити вам створити лінію та виграти

Сьогодні гра в "Хрестики-нулики" є дуже популярною серед дітей та дорослих. Вона доступна на багатьох платформах, таких як комп'ютери, мобільні пристрої та настільні ігри.

Також гра в "Хрестики-нулики" стала частою темою для наукових досліджень. Вчені вивчають її вплив на розвиток мозку та вміння приймати рішення. Гра також використовується в педагогічній практиці як засіб розвитку логічного мислення у дітей.

Гра в "Хрестики-нулики" – це давня гра, яка стала популярною в усьому світі. Вона має психологічний ефект на людину та може допомогти розвивати різні вміння та навички.

Сьогодні гра в "Хрестики-нулики" залишається популярною та доступною для всіх. Вона стала не тільки розважальною грою, але й інструментом для розвитку різних навичок та здібностей.

Література

1. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
2. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.
3. Віддалеки через віки. Книга сьома

В.А. Моравський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ЧИСЛО ГРЕМА

Число Грема - верхня межа в популярному поясненні доведення одного з аналогів теореми Рамсея . Це число стало загальновідомим після його реєстрації у Книзі рекордів Гіннеса 1980 року як найбільшого числа, використаного для серйозного математичного доведення. Воно настільки велике, що весь всесвіт, який ми візуально спостерігаємо, занадто малий для того, щоб вмістити в себе звичайний десятковий запис числа Грема. Через неможливість відобразити його звичним десятковим записом, математики використовують спеціальні позначення, розроблені Дональдом Кнутом.

При використані стрілечної нотації Кнута число грема можна записати так:

$$G = \left.\begin{matrix} 3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow 3 \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ 3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow 3 \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad} \\ 3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow 3 \\ \underbrace{\qquad\qquad} \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} 64\ \text{рівні}$$

G=g_{64} де g_1 =3 ↑↑↑↑ 3 $g_n = 3\uparrow^{g_{n-1}} 3$

Для того щоб зрозуміти наскільки це велике число розбиремо перше число цієї послідовності g1. Для цього потрібно зрозуміти стрілочкові позначення Кнута:

g1= 3 ↑↑↑↑ 3 =3 ↑↑↑ (3 ↑↑↑ 3)

3 ↑↑↑ 3 =3 ↑↑ (3 ↑↑ 3)

3 ↑↑ 3 =3 ↑ (3 ↑ 3)

3 ↑ 3 =3^3

Бачимо що:

3 ↑↑ 3 = 3^{3^3}= 7625597484987

3 ↑↑↑ 3 = 3 ↑↑ 7625597484987 або$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\Big\}\ 3^{3^3}$

Таким чином g1 може бути записане у вигляді степеневих веж

$g1=3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\Big\}\ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\Big\}\ \ .\ .\ .\ 3^{3^{3}}$ де число веж це $3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\Big\}3^{3^{3}}$

Маштаб g1 настільки великий, що його практично неможливо усвідомити адже навіть степенева вежа з чотирьма трійками $3^{3^{3^{3}}}$ це понад $10^{3\,638\,334\,640\,024}$

А це був тільки перший член послідовності.

А.П. Тераз
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

АЛФАМЕТИКА-ЗАШИФРОВАНА АРИФМЕТИКА

Алфаметика- Зашифрована арифметика. Це арифметичні рівності, у яких всі або деякі цифри замінені літерами якого-небудь алфавіту або іншими не цифровими символами. Потрібно розшифрувати значення кожного символу й відновити числовий запис дії. Як різновид математичних розваг ця форма задач була розвинена в Індії та Китаї більше, ніж 1000 років тому. На європейському континенті буквено-арифметичні головоломки почали з'являтися в періодичній пресі на початку XX ст., причому шифрування цифр буквами набуло систематичного застосування лише з 1921 році, спочатку в журналі «Strand magaziner».

У тридцятих роках у Франції видавався журнал«Sphinx», що друкував тільки матеріали, що відносилися до математичних розваг. Буквено-арифметичні задачі, розміщені в «Сфінксі» починаючи із травня 1931 року, отримали назву - cryptarithmie(фр.), cryptarithmetic(англ.)

З тих пір ця назва стала загальновизнаною у європейських і американських журналах. Встановився принцип шифрування, що залишився обов'язковим і для наступних років:

різні цифри заміняти різними буквами, уникаючи букви O для заміни нуля;

допускається один небуквений символ, що замінює будь-яку цифру.

Головоломка повинна мати розв'язок-бажано-єдиний.

Інтерес до задач крипторифметики- числових головоломок зріс після того, як намітилась тенденція осмисленого шифрування, коли букви, що заміняють цифри, утворювали слова і навіть фрази. Першим, хто застосував такий вид шифрування, був відомий англійський проблеміст у жанрі математичних розваг - H.E. Dudeney(Дюдені). Цю нову серію відкрили дві його буквено-арифметичні головоломки, що з'явилися на сторінках журналу «Strand magazine» у липні 1924 р.:

send+more=money(прийшли побільше грошей),

(two)×(two)=three(двічі два-три)

Перша з них згодом обійшла увесь світ і набула репутацію класичної в цьому жанрі. Друга дала імпульс наступним укладачам шифрів до застосування слів - числівників, але без словесних нісенітниць типу : двічі два - три.

В 1955 р. канадський математик J.A.H. Hunter запропонував новий термін для об'єднання головоломок з осмисленим шифром - «alphametic». Цікаво, що це слово утворилося внаслідок описки. Як розповідає J. Hunter, один з його кореспондентів кілька разів ужив у листі слово alphabetical(алфавітний) і один раз із опискою: alphanetical.

Так випадково утворився «гібрид» двох слів: початок слова «алфавіт» і закінчення слова «арифметика»- «алфаметика»,-виходить, буквоарифметика.

Для розв‘язування задач алфаметики немає строгого правила. Треба міркувати, підбирати, спираючись на основні положення арифметики, на властивості чисел. Наприклад, спостерігаючи структуру виду ЮН + ИЙ = ДІК. легко підібрати: Д = 1, значення И може бути тільки число 9, при цьому Н + Й ≥ 10. Іноді буває потрібно скласти таблицю передбачуваних значень букви, що у свою чергу, визначить таблицю можливих значень інших букв. Допомагають міркування про можливу останню цифру добутку: 7 * 9….3: 24 * 32 = …68, тощо. У випадку N - N —> …M число M = 1 або 4, або 6, або 9,але не 0 або 5, тому що в цьому випадку було б M, що недопустимих різні букви повинні мати різні значенння.

Підсумовуючи алфаметика- це арифметичні рівності, у яких всі або деякі цифри замінені літерами якого-небудь алфавіту або іншими не цифровими символами.

Ю. Гриценяк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

НАУКОВА СПАДЩИНА ОСТАПА СТЕПАНОВИЧА ПАРАСЮКА

Наукові здобутки Остапа Степановича Парасюка стосуються сучасної математики, теоретичної фізики та механіки. Розпочалися його наукові дослідження з розв'язання низки задач теорії пружності і пластичності, де увів новий метод знаходження контуру, що розмежовує пластичну і пружну зони, і дав визначення напружень у цих зонах для пластинки з отвором, що перебуває під впливом плоских деформуючих сил. Метод цей виявився дуже ефективним, і невдовзі його почали широко використовувати вчені при дослідженні відповідних пружно-пластичних задач. О.С. Парасюк вніс великий вклад у теорію нелінійних рівнянь теорії пластичності, знайшовши такі розв'язки, для яких компоненти напружень є водночас і розв'язками плоскої задачі теорії пружності. Йому вдалося знайти напружені стани, що відповідають пружним та пластичним зонам, і встановити при цьому межі між пружною та пластичною областями. В підсумку це дало значним вкладом в розвиток галузі науки прикладної математики - механіки твердого деформівного тіла. Також потрібно відзначити його наукові результати в теорії ймовірностей, зокрема блискуче доведення багатовимірної локальної граничної теореми. Та особливо важливими в науковій діяльності О. С. Парасюка виявилися його дослідження актуальних проблем квантової теорії поля - це фундаментальні результати, які започаткували новий етап у побудові сучасної квантової теорії поля.

Теорема Боголюбова-Парасюка – твердження, що перенормовані функції Гріна та елементи матриці розсіювання у квантовій теорії поля (КТП) вільні від ультрафіолетових розбіжностей (УФ), доведена Н. Боголюбовим та
О. Парасюком у 1955р., гарантує скінченність обчислюваних по теорії збурень цих величин квантової механіки, що свідчить про математичну коректність процедури віднімання УФ-розбіжностей і забезпечує однозначність одержуваних результатів по теорії збурень у моделях КТП, що перенормуються.. Матриця розсіювання описує в квантовій механіці процес зіткнення мікрочастинок, цей процес вважається пружним, якщо в результаті змінюються тільки імпульси, а непружним, якщо змінюються і самі частинки. Функція Гріна використовується для розв'язування лінійних неоднородних диференціальних рівнянь з граничними умовами, описує відгук системи на точкове джерело. Ультрафіолетові розбіжності – це розбіжність інтегралів за 4-ма імпульсами. а перенормування є процедурою їх усунення. Формальний розклад по степенях константи зв'язку матричних елементів матриці розсіювання, повних функцій Гріна, вершинних частин (функцій, що описують взаємодію між квантовими полями) та деяких інших величин в КТП визначається відповідними діаграмами Фейнмана, з кожною з яких зіставляється деякий многократний інтеграл за 4-ма

імпульсами віртуальних частинок $p_1, \ldots, p_N$, і в імпульсному представленні має вид:

$$M(k_1, \ldots, k_n) = \int dp_1 \ldots dp_N F(p_1, \ldots, p_N; k_1, \ldots, k_n), \tag{1}$$

де $k_1, \ldots, k_n$ 4-імпульси реальнихх частинок зовнішні імпульсні змінні). Імпульсы p_i певного набору віртуальних частинок прямують до нескінченності, відповідно інтеграл (1) при тому розбіжний за відповідним набором імпульсних змінних. Суть проблеми полягає в тому, що функції Гріна квантової теорії поля є узагальненими функціями. В процесі ж обчислень фізичних ефектів по теорії збурень ці функції необхідно перемножати, але узагальнені функції, взагалі кажучи, множити не можна. Неправильна, штучна оцінка цих добутків призводила до появи в квантовій теорії поля УФ-розбіжностей. О.С. Парасюк показав, що добуток функцій квантової теорії поля не завжди існує навіть як слабка границя їх регуляризованих значень, проте ця границя добре визначена на підпросторі тих основних функцій, які разом із своїми частинними похідними перетворюються в нуль досить високого порядку, якщо аргументи збігаються. Для розв`язання цієї задачі було доозначено цей добуток на просторі всіх основних функцій із даного класу. Саме таке доозначення і реалізує R-операція Боголюбова–Парасюка, структура якої природньо випливає із математичної структури квантової теорії поля та її фізичних принципів. Основний результат R-операції становить теорема (відома як теорема Боголюбова–Парасюка), яка стверджує, що інтегрований вираз довільної фейнманової амплітуди, внаслідок дії на неї певної рекурсивної процедури усунення ультрафіолетових розбіжностей, стає абсолютно інтегровним, а інтеграл від цього виразу в певній границі буде узагальненою функцією з класу Шварца. За загальним визнанням світової наукової спільноти, ця теорема стала не тільки значним вкладом в розвиток сучасної математики, а також фундаментом сучасної квантової теорії поля.

Література

1. Остап Степанович Парасюк (до 70-річчя від дня народження) / М.М. Боголюбов, О.Ю. Митропольський, Д.Я. Петрина, А.М. Самойленко, В.І. Фущич // Український математичний журнал. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1443–1444.

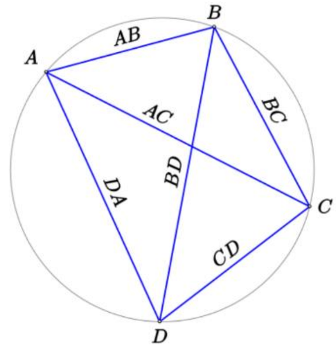
С.І. Пікуш
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Завідувач кафедри ***І.В. Шевчук,*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

Теорема Птолемея є однією з найвідоміших теорем геометрії. Вона стверджує, що для будь-якого чотирикутника, описаного навколо кола, справджується рівність:

AB × CD + BC × AD = AC × BD,

де AB, BC, CD та AD - сторони чотирикутника, а AC і BD - його діагоналі.



Теорему Птолемея можна застосовувати для розв'язання різноманітних задач геометрії та тригонометрії. Вона допомагає визначати відстані та кути в різних фігурах, а також знаходити відповіді на практичні завдання, пов'язані з астрономією та навігацією.

Історія теореми Птолемея налічує понад 2000 років. Її назва походить від імені давньогрецького ученого Птолемея, який жив у 2 столітті н.е. Він використовував цю теорему для розв'язання різних геометричних та астрономічних задач.

Теорема Птолемея дуже корисна у навчанні геометрії та тригонометрії, а також в практичному житті. Вона допомагає зрозуміти, як співвідносяться різні елементи геометричних фігур, і як можна використовувати ці знання для вирішення складних задач.

Теорема Птолемея є спеціальним випадком більш загальної теореми, відомої як Теорема Брехта-Гельфонда. Ця теорема стверджує, що якщо a, b, c та d - це алгебраїчні числа, то e × f теж буде алгебраїчним числом.

Єдиний розв'язок рівняння, яке випливає з Теореми Птолемея, не завжди може бути отриманий аналітичним шляхом. Це привело до розвитку численних методів для розв'язання рівнянь, зокрема методу Ньютона.

Теорема Птолемея має важливі застосування у геометрії та тригонометрії, зокрема для визначення відстані між точками на поверхні Землі за допомогою їх географічних координат.

Теорема була відома в індійській математиці ще до Птолемея, але він став першим, хто дав їй загальне формулювання та довів її.

Науковці продовжують досліджувати властивості та загальнізації Теореми Птолемея. Наприклад, було доведено, що у випадку, коли чотирикутник є випуклим і співпадає зі своїм двоїстим, то Теорема Птолемея буде містити ще один додатковий член.

Теорема Птолемея може бути використана для доведення Піфагорової теореми. Дійсно, якщо ми взяли чотирикутник, у якого один з кутів дорівнює 90 градусів, то довжина його діагоналі (що є гіпотенузою) буде рівна сумі добутків довжин двох протилежних сторін (які є катетами).

Іноді Теорему Птолемея називають "теоремою правої руки", оскільки на її доведення можна поглянути як на праву руку, де сторони a і c є пальцями, сторони b і d є великим і мізинцем, а діагоналі e і f є кистю.

Її можна також використовувати для встановлення деяких нерівностей. Наприклад, якщо чотирикутник є вписаним і опуклим, то його периметр буде меншим за подвійне добуток радіусів вписаного і описаного колів.

Теорема Птолемея може бути застосована не тільки до чотирикутників, але і до багатокутників з більшою кількістю сторін. Однак, формула для таких випадків є значно більш складною та залежить від величини кутів багатокутника.

Вона має широкі застосування у математиці, фізиці та інших науках. Наприклад, вона може бути використана для визначення геометричних властивостей атомів та молекул в хімії, або для розв'язання проблеми динаміки руху тіл в фізиці.

Таким чином, теорема Птолемея є важливою теоремою геометрії, яка має практичне значення і застосовується в різних галузях науки та техніки.

Література

1. Кушнір І.А. Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників: Довідник. / І.А. Кушнір. – К.: Факт, 2002. – 112с.
2. Бакельман И. Я. Инверсия\ И. Я. Бакельман. – М.: «Наука», 1966. – 52-54с.
3. Перехойда О. Одна цікава геометрична тотожність / О. Перехойда, Р. Ушаков // Математика в школі. – 1999. – С. 41-42.

Г.О.Боровицька
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***І.В. Шевчук,*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ВИБРАНІ ПИТАННЯ НЕЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

Передумовою відкриття уявної геометрії була проблема п‘ятого постулату Евкліда, яка до початку 19 століття залишалася нерозв’язаною. Постулат про паралельні прямі привернув до себе увагу ряду геометрів, які вважали невірним що це твердження є постулатом і намагалися його довести.

П'ятий постулат Евкліда стверджує, що якщо дві прямі, перетинаються із прямою, і утворюють з нею внутрішні односторонні кути, сума яких менше 180º, то ці прямі перетинаються з тієї сторони, з якої ця сума менше 180º.

Слава розв’язку проблеми 5 постулату належить російському математику М.І. Лобачевському.

Як творець неевклідової геометрії він прийшов до таких висновків:

1)П’ятий постулат довести не можна.

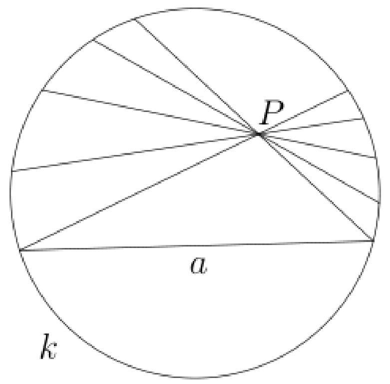
2) Приєднавши до основних положень Евклідової геометрії заперечення п'ятого постулату (аксіому Лобачевського), можна розвинути логічно довершену і змістовну геометрію, відмінну від Евклідової.

Геометрія Лобачевського — геометрична теорія, що базується на основних міркуваннях, що і звичайна евклідова геометрія, за виключенням аксіоми про паралельність, що замінюється на наступну аксіому:

через точку, що не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, що лежать з даною прямою в одній площині і не перетинають її.

В геометрії Лобачевського в площині через точку, що не належить прямій a проходить нескінчена кількість прямих, що не перетинають a. З них паралельні до a називаються тільки дві.

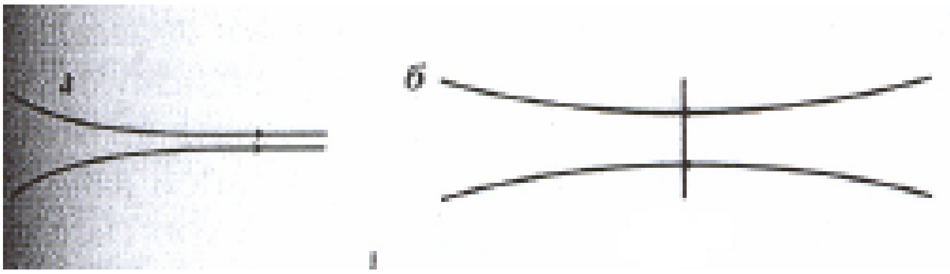
Всі інші прямі, що не перетинають дану, називаються ультра паралельними.



Прямі в моделі Кляйна 1

Лобачевский стверджує, що паралельні прямі необмежено зближаються в напрямі паралельності, а в протилежному напрямку вони необмежено віддаляються.

Такі прямі він називає розбіжними і ці прямі мають єдиний спільний перпендикуляр, по різні сторони від якого вони необмежено віддаляються.



Розбіжні прямі 1

Відкриття уявної геометрії має велике значення у розвитку сучасної науки про Всесвіт оскільки першим вченим хто заперечив універсальність геометрії Евкліда для Всесвіту був М.І.Лобачевский.

Свої припущення обґрунтовував тим, що у реальному просторі не виконуються закони евклідової геометрії, тобто сума кутів трикутника, який має гігантські масштаби буде менша за 180°.

Проте результати вимірювань не виправдали сподівань Лобачевського, тому питання залишилося відкритим.

Дослідження показало, що геометрія Лобачевського має широке застосування в математиці, фізиці. Історичне її значення полягає в тому, що її побудовою Лобачевський показав можливості геометрії, яка відмінна від Евклідової, що ознаменувало нову епоху в розвитку геометрії і математики загалом.

Література

1. Стєганцева П.Г. Основи математики: навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» / П.Г. Стєганцева, М.О.Гречнєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 85 с
2. Бердон А. Геометрія дискретних груп = Геометрия дискретных групп: Пер. з англ.. — Москва : Наука, 1986. — 304 с.
3. Ефимов Н.В. Вища геометрія = Высшая геометрия. — Москва : Наука, 1978. — 576 с.
4. Погорелов А.В. Лекції з основ геометрії = Лекции по основаниям геометрии. — Харків : ХДУ, 1964. — 138 с.
5. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрія = Геометрия. — Москва : МЦНМО, 1997. — 352 с. (Книга в *.pdf та *.ps форматі. [Архівовано 9 січня 2015 у Wayback Machine.])

СЕКЦІЯ 4. Математика і сучасність

Е. П. Коляса, П. М. Забавський
Львівський національний університет імені Івана Франка
Науковий керівник ***Л. Ю. Фірман*** *старший викладач кафедри вищої математики, механіко-математичний факультет*

ТЕОРІЯ ГРАФІВ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В МЕРЕЖАХ ЗВ'ЯЗКУ

Теорія графів - це математична теорія, що вивчає структуру графів, тобто об'єктів, які складаються з вершин та ребер, що з'єднують ці вершини. Ця теорія виникла у 18-19 століттях в зв'язку з практичними задачами, пов'язаними з маршрутизацією в транспортній мережі та телеграфних системах. Протягом часу теорія графів була успішно використана в різних галузях, включаючи комп'ютерні мережі та інформаційні технології.

У мережах зв'язку теорія графів дозволяє знайти найкоротший шлях між двома точками, розмістити мережеве обладнання та забезпечити найбільш ефективний обмін даними.

Для знаходження найкоротшого шляху між двома точками у графі можна використовувати формулу Дейкстри:

$$D(v) = \min \{D(u) + w(u, v)\}$$

де u - вершина, яка безпосередньо передує вершині v на шляху до неї, w(u,v) - вага ребра, що з'єднує вершини u та v.

Ця формула дозволяє обчислювати найкоротші відстані від початкової вершини до всіх інших вершин у графі з не від'ємними вагами ребер. Для знаходження найкоротшого шляху між двома заданими вершинами використовуються ітерації цієї формули для кожної вершини в графі, починаючи з початкової вершини. В результаті отримується найкоротший шлях від початкової вершини до кінцевої вершини.

Теорія графів застосовується у багатьох інших аспектах мереж зв'язку, таких як забезпечення безпеки мережі, оптимізація використання ресурсів та планування мережі в цілому.

Застосування теорії графів в мережах зв'язку може мати велике значення для їх ефективності та безпеки. Зокрема, графи можуть використовуватись для аналізу структури мережі та виявлення потенційних вразливостей. Крім того, за допомогою графів можна моделювати різноманітні взаємодії між вузлами мережі та використовувати цю інформацію для розробки стратегій маршрутизації трафіку та підвищення безпеки передачі даних.

Проте, для забезпечення безпеки мереж зв'язку також необхідно враховувати інші чинники, такі як захист від зламів та кібератак, шифрування даних, контроль доступу. Для цього можуть використовуватись різноманітні методи та технології, такі як фільтрація пакетів, віртуальні приватні мережі та аутентифікація користувачів.

На практиці, теорія графів знайшла своє застосування в багатьох сферах, серед яких найважливішою є телекомунікації. Завдяки теорії графів, можна моделювати мережі зв'язку та забезпечувати максимальну ефективність їх роботи.

Одним із прикладів застосування теорії графів у телекомунікаціях є маршрутизація даних в мережі Інтернет. Кожен комп'ютер в мережі під'єднаний до роутера, який відповідає за передачу даних до інших комп'ютерів. Маршрутизація даних полягає у виборі оптимального шляху для передачі даних з одного комп'ютера на інший.

Тут можна застосувати теорію графів, де вузли графу відображають комп'ютери, а ребра - з'єднання між ними. Завдяки цьому можна знайти оптимальний шлях між двома комп'ютерами, що дозволяє збільшити швидкість передачі даних та зменшити затримки.

Інший приклад застосування теорії графів в телекомунікаціях - це планування та оптимізація розміщення антен для забезпечення максимального охоплення сигналом мобільного зв'язку. Тут граф відображає мережу мобільного зв'язку, а вершини та ребра відображають відповідно антени та їх зв'язки.

Також, теорія графів використовується для вирішення проблеми маршрутизації транспортних засобів у логістичних мережах. Це дозволяє ефективно розподіляти товари та знижувати витрати на транспортування.

На жаль, не всі проблеми мережевої теорії можуть бути вирішені за допомогою графів, іноді доводиться використовувати інші методи. Проте, теорія графів все ще є потужним інструментом для вирішення багатьох практичних завдань у мережах зв'язку.

Підсумовуючи вище наведене, теорія графів залишається важливим інструментом для аналізу та оптимізації мереж зв'язку. Із зростанням об'єму даних та залежності нашого суспільства від мережевих технологій, теорія графів стає ще більш важливою для вирішення сучасних проблем у мережах зв'язку. Застосування теорії графів може допомогти забезпечити ефективність та безпеку мереж, проте необхідно взяти до уваги усі аспекти безпеки та використовувати різноманітні методи для повноцінного захисту. Не врахувавши усіх чинників безпеки, інформація передана по мережі, може бути спотворена або ж частково чи повністю втрачена. В результаті це може призвести до катастрофічних наслідків.

Література

1. Bollobás, B. (1998). Modern graph theory. Springer Science & Business Media.
2. Diestel, R. (2010). Graph theory. Springer Science & Business Media.
3. Chung, F. R. (1997). Spectral graph theory. American Mathematical Society.
4. Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). Graphs & digraphs. CRC Press.
5. Gross, J. L., & Yellen, J. (2005). Handbook of graph theory. CRC Press.

Б.І. Дмитруш
Львівський національний університет імені Івана Франка
Науковий керівник ***О. І. Бардін*** *викладач кафедри безпеки життєдіяльності*

ВПЛИВ ОНЛАЙН МАГАЗИНІВ НА БЕЗПЕКУ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ ТА ОХОРОНУ ПРАЦІ

Права громадян, щодо права на працю, безпечні умови праці, відпочинок гарантовані Конституцією України[1]. Забезпечення безпечних умов праці є основою сучасних націонал-демократичних держав з потужною ринковою економікою. З цього випливає, що Україні, яка бажає отримати своє "економічне диво" та в якої попереду відновлення власної економіки після перемоги у війні, потрібно приділити достатньо уваги для підвищення рівня безпеки праці.

Охорона праці – це система правових, соціально-економічних, організаційно-технічних, санітарно-гігієнічних і лікувально-профілактичних заходів та засобів, спрямованих на збереження життя, здоров'я і працездатності людини у процесі трудової діяльності[2].

Ця система включає в себе аналіз ризиків, встановлення заходів безпеки та контроль їх виконання, навчання працівників правилам безпеки, організацію медичного обслуговування, а також встановлення та дотримання правил індивідуального захисту працівників. Метою охорони праці є зменшення ризику травм та захворювань, пов'язаних з виконанням професійних обов'язків, та забезпечення належних умов праці.

Забезпечення безпечних умов праці покладається на роботодавців[2]. Роботодавці зобов'язані розробляти заходи покращення умов праці персоналу. Такі заходи повинні передбачати сучасні методи моніторингу, до яких відносять:

- Електронні системи моніторингу: такі системи дозволяють відстежувати рівень шуму, освітлення, температуру, вологість та інші параметри робочого середовища. Це дозволяє оперативно виявляти та усувати проблеми з безпекою та здоров'ям працівників.
- Сенсорні технології: деякі пристрої можуть виявляти шум, вібрацію, температуру та інші параметри навколишнього середовища. Вони дозволяють збирати дані та перетворювати їх на корисну інформацію, яка може використовуватися для покращення умов праці.
- Мобільні додатки: існують додатки, які дозволяють працівникам відстежувати своє здоров'я, рівень стресу та інші показники, пов'язані з робочим процесом. Вони можуть надавати рекомендації щодо покращення умов праці та забезпечення безпеки працівників.
- Штучний інтелект: деякі системи штучного інтелекту можуть автоматично аналізувати дані, щоб виявляти проблеми з безпекою та здоров'ям працівників. Наприклад, вони можуть аналізувати звукові

записи для виявлення небезпечного рівня шуму, або відеозаписи для виявлення небезпечних робочих практик.

- Віртуальна реальність: це новий напрямок в моніторингу умов праці. Системи віртуальної реальності можуть симулювати різні робочі ситуації, щоб навчити працівників правильним методам роботи та уникнення небезпек.

Також, для створення комфортних та безпечних умов праці та забезпечення достатнього рівня охорони праці доцільно використовувати онлайн магазини. В цілому, онлайн магазини не пов'язані з безпекою та здоров'ям працівників і не можуть напряму впливати на умови праці. Проте, в деяких випадках онлайн магазини можуть бути корисні для покращення умов праці.

Адже, на віртуальних полицях онлайн магазинів можна розмістити, наприклад, необхідну для навчання персоналу літературу. В іншій категорії товарів можна знайти різного роду засоби індивідуального захисту працівників.

Крім того, онлайн магазини можуть належати безпосередньому виробнику, наприклад, протипожежних виробів, систем кондиціювання та вентиляції, засобів індивідуального захисту та інших товарів. За допомогою таких засобів, як інтернет магазини, можна швидко і зручно обрати необхідні товари, послуги та укладати угоди на постачання. І це може бути як закупівля чогось дрібного, наприклад, протиударних касок, захисних окулярів чи масок-респіраторів так і великих та габаритних систем, таких як: вентиляційні системи, системи очистки повітря, які необхідні при роботі на металокомбінатах, системи автоматичного пожежогасіння тощо.

Звичайно інтернет магазини не є одним із основних інструментів для забезпечення достатнього рівня охорони праці. Проте підсумовуючи вище наведене, застосування можливостей онлайн магазинів, може мати позитивний вплив на деякі аспекти робочого процесу. Адже, розробка таких програм дає можливість роботодавцям забезпечити хороші умови праці, що в свою чергу збільшує продуктивність праці та потенційні прибутки.

Література

1. Конституція України : https://www.president.gov.ua/ua/documents/constitution/konstituciya-ukrayini-rozdil-ii
2. Закон України про охорону праці: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2694-12#Text
3. Онлайн магазин: https://pidru4niki.com/10931123/informatika/organizatsiya_tehnologiya_roboti_internet-magazinu
4. Статистика: https://pro-op.com.ua/news/3377-statistika-virobnichogo-travmatizmu-na-knets-2021-roku

Б.О. Дмитрук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЯК МАТЕМАТИКА ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ В КОМП'ЮТЕРНИХ ІГРАХ

Розглянемо три аспекти ігор

- Геометрія - це фігури, з яких складається світ, навколо якого ви рухаєтеся, і всі персонажі в ньому.
- Пересування ігрових персонажів- основа для пошуку маршрутів по ігровому світу.
- Фізика - змушує світ поводитись так, щоб можна було вірити.

Геометрія. Геометрія вивчає різні форми. Найпростіша форма - це точка. (Досить важко пояснити, що таке точка, в основному це просто позиція, наприклад, самий кінець вашого носа — точка). Ще одна проста форма - це пряма лінія. Пряма — це найпростіша фігура, що з'єднує дві точки. Літак — це більш складна форма. Існують і більш складні форми, які називаються твердими тілами, наприклад, куб або сфера. Ось кілька фотографій цих речей

Вектор. Вектор — це математичний спосіб представлення точки. Вектор — це 3 числа, які зазвичай називають x, y і z. Ви можете думати про ці числа як відстань, яку потрібно пройти в 3 різних напрямках, щоб дістатися до точки. Наприклад, одну руку витягніть вправо, а іншу – прямо вперед. Тепер я можу дати вам вектор, і ви зможете знайти суть, про яку я говорю. Наприклад, якщо я скажу x=3, y=1, z=5, ви знайдете точку, пройшовши 3 метри в напрямку вашої правої руки, потім 1 метр у напрямку вашої лівої руки, а потім діставши драбину і піднявшись на 5 метрів.

Пересування персонажів. Комп'ютеру часто потрібно перемістити персонажа або транспортні засоби з одного місця в інше. Наприклад, у вас часто є вороги, яким потрібно бігти до гравця, коли їх помічають. Вороги повинні йти найшвидшим шляхом, але, очевидно, не можуть пройти крізь дерева чи ящики.
Щоб пояснити, як комп'ютер розробляє найкращий маршрут, вам потрібно знати, що таке вузли, ребра та графіки. Можливо, ви вже чули про графіки в математиці, але тут вони означають дещо інше. Найпростішим прикладом вузлів і графіків є карта деяких міст і доріг між ними (або підземна карта). Кожне місто є вузлом, зазвичай малюється у вигляді круглої краплі. Кожна дорога є ребром і з'єднує два вузли (міста), які зазвичай малюються у вигляді прямих ліній. Вся сукупність вузлів і ребер (міст і доріг) називається графом. Іноді є одностороння дорога, яка називається спрямованим краєм, і ми малюємо на ній стрілку, щоб показати, яким шляхом по ній можна рухатися. Наприклад, якщо є два міста A і B і лінія зі стрілкою від A до B, то ми можемо подорожувати від A до B, але не

від В до А. Ось приклад графіка, ви можете" t подорожувати від В до А, але ви можете подорожувати від А до В. Ви не можете подорожувати від С до А або від А до С, але ви можете подорожувати від В до С і від С до В.

Фізика. Віртуальний світ у комп'ютерній грі має переконати нас повірити в це, коли речі рухаються так, як ми. Тверді об'єкти повинні стикатися з іншими твердими об'єктами, а іноді і відскакувати від них. Вибухи повинні штовхати речі навколо, гази повинні плавати в повітрі, речі повинні плавати або тонути у воді. Ігри використовують спрощені моделі фізики, хоча вони все ще складні!

Література

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Рекреаційна_математика
2. http://www.mmf.lnu.edu.ua/ar/1977
3. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
4. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

І.-Н. Ковальчук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Функція — це певне «правило», або «перетворення», яке зіставляє унікальне вихідне значення кожному вхідному значенню. Наприклад, в кожної особи є улюблений колір. Улюблений колір є «функцією особи», для прикладу, в Миколи улюбленим є помаранчевий, у Вікторії — синій. Тобто, вхідними значеннями тут є особи, вихідними — улюблені кольори. Або, наприклад, час, необхідний камінцю, кинутому з певної висоти, щоби досягнути землі, залежить від цієї висоти, яка тут виступає як вхідне значення, а час, який камінець знаходиться в польоті — як вихідне значення. Звучатиме мабуть дивно , але функції зустрічаються всюди , вони скрізь.
Для прикладу:

Фінанси: функції використовуються для розрахунку фінансових показників, таких як доходи, витрати, прибуток, відсоткові ставки, а також для прогнозування фінансових результатів.

Медицина: функції використовуються для опису різних фізіологічних процесів в організмі людини, таких як дихання, серцева діяльність, температура тіла та інші. Також функції застосовуються для розрахунку доз лікарських засобів, прогнозування розвитку захворювань та ефективності лікування.

Транспорт: функції використовуються для прогнозування руху транспортних засобів, розрахунку швидкості та часу прибуття до місця призначення, визначення оптимального маршруту та вартості подорожі.

Комерція: функції використовуються для аналізу продажів, планування виробництва, оптимізації логістики та прогнозування попиту на товари та послуги.

Наука: функції використовуються для моделювання фізичних, хімічних та біологічних процесів, а також для аналізу даних та статистичного аналізу.

Інформатика: функції використовуються для програмування алгоритмів, обробки даних та створення програмного забезпечення. І це ще далеко не всі приклади застосування функцій в реальному житті.

Функції є не лише в математичних науках , вони говорять про зв’язок між речами. Що станеться, якщо …? За допомогою запитань цього типу можна створювати математичні моделі, а математичні моделі часто є функціями. Отримавши всі ці дані, ми можемо аналізувати. Саме в цьому контексті використовуються функції. Функція обробляє набір даних, щоб ми могли проаналізувати інформацію.

Для прикладу візьмемо Інстаграм. Він складається із функцій. Одні функції сортують список друзів, другі вибирають фільтри. Третій тип функцій використовується під час підключення до Інтернету. Таким чином функції роблять твоє життя цікавішим, простішим та веселішим.

Булеві функції

Булеві функції - це функції, які оперують на двох можливих значеннях (істина або хиба, 1 або 0, так або ні), і повертають одне з цих двох значень як результат. Названі на честь математика і логіка Джорджа Буля, який розробив систему логіки. У булевій алгебрі існує шість основних булевих операцій: кон'юнкція (AND), диз'юнкція (OR), від'ємне значення (NOT), альтернативне "або" (XOR), імплікація (IF-THEN), та еквівалентність (IF-AND-ONLY-IF). За допомогою цих операцій можна будувати складніші булеві функції, що приймають більше двох вхідних значень, та які виконуються на цифрових комп'ютерах.

Булеві функції також знаходять застосування в житті людини, зокрема в таких галузях:

Електроніка: булеві функції дозволяють створювати логічні схеми та електронні пристрої, такі як комп'ютери, смартфони, пристрої автоматизації та контролю виробництва, медичні прилади та багато інших.

Робототехніка: булеві функції використовуються для програмування роботів та автоматичних систем управління, які повинні дотримуватися певних правил та умов.

Математика: булеві функції використовуються в логіці та алгебрі для формалізації різних задач та побудови алгоритмів розв'язання цих задач.

Філософія та логіка: булеві функції є важливим інструментом для формалізації та дослідження різних логічних аргументів та тверджень.

Телекомунікації: булеві функції використовуються для кодування та передачі інформації через мережі зв'язку, такі як Інтернет.

Інтернет-безпека: булеві функції використовуються для захисту від хакерських атак та зловмисного програмного забезпечення.

Звичайно, що булеві функції застосовують в інформатиці: вони використовуються в логіці програмування, управлінні базами даних, розпізнаванні образів та багатьох інших алгоритмічних задачах.

Отже, булеві функції мають широке застосування у різних галузях техніки, науки та інформатики, що робить їх важливим інструментом для розв'язання різних завдань та задач в житті.

Література

1. https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/funktsiyi/teoriya-funktsiy/osnovy-funktsiy/yake-znachennya-funktsiy-u-realnomu-zhytti
2. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)

3. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%83%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B0_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F
4. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
5. Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М. Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

М. Бакалець
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЗНАХОДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕНТРА ДИСКРЕТНОГО РЯДУ РОЗПОДІЛУ У ЗАДАЧАХ СТАТИСТИКИ ІЗ ЗАСТОСУВАНННЯМ ФУНКЦІЙ ПРОГРАМИ EXCEL.

Термін "статистика" походить від латинського слова "статус" (status), що означає "визначений стан речей". У сучасному розумінні термін "статистика" має декілька значень, наприклад, під статистикою розуміють сукупність цифрових показників, що дають всесторонню уяву про суспільні явища, економіку в цілому та її галузі [1].

Застосування комп’ютерних технологій створює реальні можливості широкого впровадження методів статистики для ров’язування різного роду економічних задач. Так, наприклад, у програмі Excel існує багато статистичних функцій, за допомогою яких можна не лише групувати дані, які надходять до дослідника [2], а також знаходити характеристики центра ряду розподілу, таких як середня, мода, медіана та робити після цього відповідні висновки.

Розглянемо річний прибуток 24 фірм міста: 20, 26, 26, 26, 23, 27, 26, 26, 27, 28, 26, 25, 26, 28, 26, 24, 26, 27, 26, 24, 25, 27, 27, 23 тис. грн. Знайти середній річний прибуток, найчастіший прибуток (мода) та знайти прибуток половини фірм (медіану).

Дискретний ряд розподілу річного прибутку запишемо у вигляді таблиці:

Річний прибуток *i*-ої фірми, x_i	20	23	24	25	26	27	28
Кількість фірм, які мають річний прибуток x_i, n_i	1	2	2	2	10	5	2
Нагромаджена частота, S_n	1	3	5	7	17	22	24

Середній річний прибуток розраховується за формулою середньої арифметичної зваженої [3]: $\bar{x}_a = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = 25{,}625$ тис. грн.

За даними таблиці знайдемо моду дискретного ряду розподілу. Найвищою є частота 10, яка відповідає прибутку 26 тис. грн., тому $M_o = 26$ (тис. грн.). Це означає, що найчастіший прибуток 26 тис. грн.

За даними таблиці знайдемо медіану дискретного ряду. Обсяг сукупності (n = 24) дає змогу як медіану вибрати варіант із порядковим номером $\frac{n}{2}$ або $\frac{n}{2}+1$. В нашому випадку обидві ці варіанти x_{12}, x_{13} набувають значення $x = 26$ про що свідчить значення нагромадженої частоти $S_n = 17 > 12$ (члени ряду з номером від 8 по 17 набувають значення, яке дорівнює 26). Отже, $M_e = 26$ (тис. грн.). Це означає, що для половини фірм (елементів сукупності) річний прибуток не перевищує 26 тис. грн.

Тепер знайдемо характеристики центра ряду розподілу використовуючи функції у програмі Excel [4].

Припускаємо, що дані про річний прибуток надійшли у вигляді документу Excel або ці дані можна перенести у програму Excel, сформувавши їх в один стовпець **A2:A25**. Далі використовуємо на панелі інструментів клавішу f_x (Майстер функцій), у якій ставимо знак “=”, вибираємо категорію “**Статистичні**” та функцію “**СРЗНАЧ**”, де у “**Число 1**” набираємо діапазон **A2:A25.** Після цього натискаємо клавішу **Enter** та одержуємо середній річний прибуток. Далі подібно використовуємо на панелі інструментів клавішу f_x, у якій вибираємо категорію “**Статистичні**” та функцію “**МОДА.ОДН**”, де у “**Число 1**” набираємо діапазон **A2:A25.** Після цього натискаємо клавішу **Enter** та одержуємо найчастіший річний прибуток (мода). Використавши функцію “**МЕДІАНА**”, знайдемо медіану дискретного ряду розподілу (рис. 1).

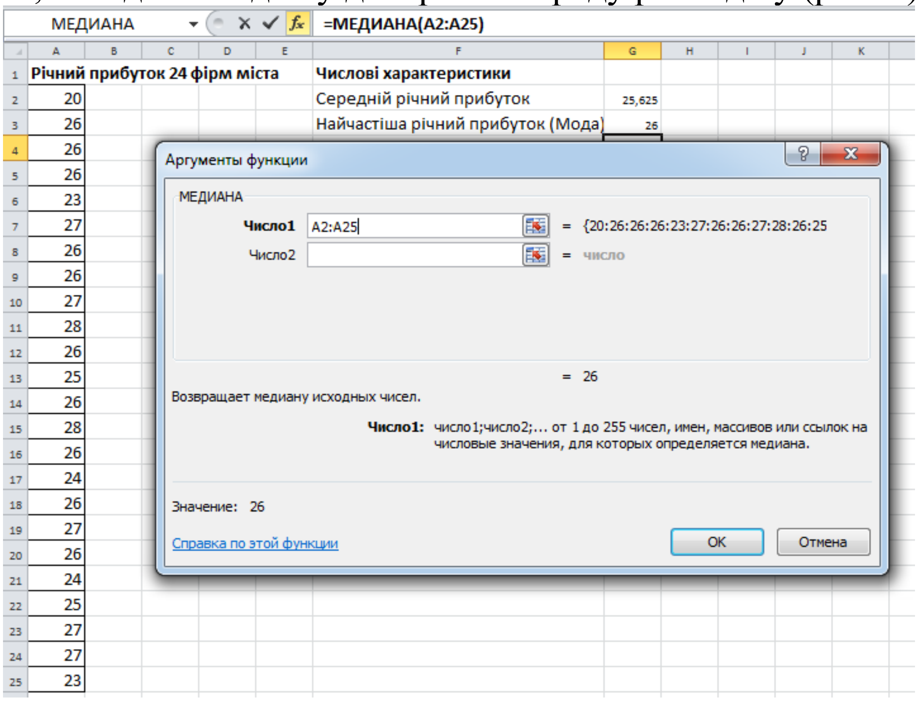


Рис. 1

Література

1. Фещур Р.В., Барвінський А.Ф., Кічор В.П. Статистика. Навч. посібник. – Львів: “Інтелект-Захід”, 2006. – 256 с.

2. Завадка І., Чмир О. Побудова дискретного ряду розподілу у задачах статистики із застосуванням функцій програми EXCEL. IX всеукраїнська науково-практична конференція курсантів та студентів “Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє”. 24 квітня, 2022 р. – Львів, 2022. – С. 68 - 70.

3. Кузик А.Д., Меньшикова О.В., Чмир О.Ю. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Львів: ЛДУ БЖД, 2012. – 192 с.

4. Карабин О.О., Чмир О.Ю., Меньшикова О.В. Математичні методи в психології. Лабораторний практикум. – Львів: ЛДУ БЖД, 2011. – 108 с.

А. Гаврилюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ.

Задача 1: Пошук найбільшого спільного дільника двох чисел.

У дискретній математиці однією з основних задач є пошук найбільшого спільного дільника двох цілих чисел. Ця задача є важливою для багатьох алгоритмів, наприклад, при визначенні простих чисел або шифруванні даних.

Існує декілька способів розв'язання цієї задачі, один з найпростіших – це використання алгоритму Евкліда. Цей алгоритм полягає в послідовному відніманні меншого числа від більшого до тих пір, поки числа не стануть рівними. Останнє число, що залишиться, буде найбільшим спільним дільником.

Нехай маємо два числа: 273 і 702. Для пошуку найбільшого спільного дільника ми можемо використати метод Евкліда. Спочатку ділимо більше число на менше і записуємо залишок:

$$702 \div 273 = 2 \text{ (залишок: 156)}$$

Далі ділимо попереднє менше число на залишок і знову записуємо залишок:

$$273 \div 156 = 1 \text{ (залишок: 117)}$$

Потім ділимо попередній залишок на останній залишок і знову записуємо залишок:

$$156 \div 117 = 1 \text{ (залишок: 39)}$$

Далі ділимо попередній залишок на останній залишок і знову записуємо залишок:

$$117 \div 39 = 3 \text{ (залишок: 0)}$$

Оскільки останній залишок дорівнює нулю, то останній ненульовий залишок 39 – є найбільшим спільним дільником чисел 273 і 702.

Такий підхід до розв'язання задачі має велике практичне застосування в криптографії, особливо при роботі з великими числами та шифруванні повідомлень.

Задача 2: Розкладання на множники.

Нехай задане ціле число N. Знайти всі унікальні прості множники, що утворюють добуток N.

Ця задача є важливою у теорії чисел та криптографії. Наприклад, у криптографії, де шифрування засноване на складності розкладання великих чисел на прості множники, ця задача є дуже актуальною.

Один із способів розв'язання цієї задачі полягає у використанні триалізації – методу, що полягає в переборі простих чисел, що менші за квадратний корінь з числа N. Далі ділимо число N на знайдені прості числа, якщо N ділиться без остачі – записуємо знайдені прості множники, інакше переходимо до наступного простого числа. Цей процес повторюється до тих пір, поки число N не стане меншим за квадрат простого числа, що вже перевірялось.

Розглянемо число 144:

1. Знаходимо квадратний корінь з 144:

$$\sqrt{144} = 12;$$

2. Перевіряємо наступне просте число 2:

$$144 \div 2 = 72.$$

Записуємо 2 як простий множник, тобто $144 = 2 \times 72$;

3. Перевіряємо наступне просте число 2:

$$72 \div 2 = 36.$$

Записуємо 2 як ще один простий множник, тобто $144 = 2 \times 2 \times 36$;

4. Перевіряємо наступне просте число 2:

$$36 \div 2 = 18.$$

Записуємо 2 як ще один простий множник, тобто $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 18$;

5. Перевіряємо наступне просте число 2:

$$18 \div 2 = 9.$$

На цьому етапі ми бачимо, що 2 не є дільником числа 9. Переходимо до наступного простого числа 3;

6. Перевіряємо наступне просте число 3:

$$9 \div 3 = 3.$$

Записуємо 3 як ще один простий множник, тобто $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$.

7. Перевіряємо наступне просте число 3:

$$3 \div 3 = 1.$$

На цьому етапі ми бачимо, що число 1 не має простих множників.

Отже, прості множники числа 144: 2, 2, 2, 3, 3.

Література

1. Розен К., Дискретна математика та її застосування, 7-е видання. Видавництво "Міжнародна книга", 2012 рік, 1072 с.

2. Сорока Н., Манжулова О., Задачі з дискретної математики. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2005 рік, 336 с.

Б. Круликівський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ У ПАКЕТІ MAPLE.

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремум функції (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання. Такі задачі ще називають оптимізаційними.

Як самостійний науковий напрямок математичне програмування сформувалось на початку 40-х років XX століття. У 1939 році відомий математик Л. В. Канторович опублікував роботу «Математичні методи організації та планування виробництва», в якій сформулював принципово новий клас екстремальних задач з обмеженнями і розробив ефективний метод їх розв'язання. Так було започатковано новий розділ прикладної математики, який пізніше отримав назву «лінійне програмування». Дослідження Л. В. Канторовича в цій галузі сприяли створенню строго наукового інструментарію для розв'язання фундаментальних економічних проблем (ефективності капіталовкладень, ціноутворення, теорії ренти тощо), за що в 1975 р. Л. В. Канторович був удостоєний (разом з Т. Ч. Купмансом) Нобелівської премії з економіки.

Методам лінійного програмування присвячено багато робіт зарубіжних вчених. У 1949 р. американським вченим Хічкоком поставлена транспортна задача, Дж. Данцигом був розроблений симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування, Д. Гейлом, Г. У. Куном, А. У. Таккером сформульована теорема двоїстості та розроблена теорія розв'язання задач опуклого програмування. Крім того, французьким математиком Лагранжем та американцем Беллманом розроблені методи множників і теорія функціональних рівнянь розв'язання відповідно задач опуклого та динамічного програмування.

За останні роки розроблено багато ефективних методів розв'язання математичних задач оптимізації з використанням різного програмного забезпечення, зорема пакету Maple.

Залежно від виду цільової функції та системи обмежень, галузі математичного програмування поділяють на:

- лінійне програмування – цільова функція і функції обмежень, що входять в систему обмежень є лінійними;

- нелінійне програмування – цільова функція або одна із функцій обмежень, що входять в систему обмежень є нелінійними;

- цілочисельне (дискретне) програмування – якщо на хоча б одну змінну накладена умова цілочисельності;

- динамічне програмування – якщо параметри цільової функції і/або система обмежень змінюються в часі або цільова функція має адитивний/мультиплікативний вигляд чи сам процес прийняття рішення має багатокроковий характер.

Розглянемо задачу цілочисельного програмування. У програмі Maple вбудовано пакет для розв'язання задач цілочисельного лінійного програмування Optimization, який використовує методи оптимізації. Продемонструємо його на задачі.

Задача. Галузеве міністерство розробляє 7 замовлень між 7 заводами на виробництво деякого товару. Собівартість виконання замовлень задана матрицею (ум. одн.):

$$\begin{pmatrix} 200 & 230 & 150 & 170 & 240 & 220 & 130 \\ 210 & 240 & 140 & 200 & 250 & 200 & 180 \\ 190 & 210 & 180 & 180 & 260 & 210 & 140 \\ 180 & 250 & 190 & 190 & 220 & 240 & 150 \\ 220 & 240 & 140 & 200 & 260 & 250 & 160 \\ 200 & 210 & 160 & 160 & 280 & 260 & 170 \\ 230 & 220 & 180 & 170 & 250 & 240 & 160 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальний розподіл замовлень між заводами із загальною мінімізацією собівартості їх виконання за умовами, що кожне замовлення виконується повністю тільки одним заводом. [1]

Використовуючи програму Maple, розв'язуємо цю задачу [2,3].

$> \; restart; with(Optimization):$

$$> \; c := \begin{bmatrix} 200 & 230 & 150 & 170 & 240 & 220 & 130 \\ 210 & 240 & 140 & 200 & 250 & 200 & 180 \\ 190 & 210 & 180 & 180 & 260 & 210 & 140 \\ 180 & 250 & 190 & 190 & 220 & 240 & 150 \\ 220 & 240 & 140 & 200 & 260 & 250 & 160 \\ 200 & 210 & 160 & 160 & 280 & 260 & 170 \\ 230 & 220 & 180 & 170 & 250 & 240 & 160 \end{bmatrix} : x := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,6} & m_{1,7} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} & m_{2,6} & m_{2,7} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,6} & m_{3,7} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} & m_{4,7} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & m_{5,6} & m_{5,7} \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} & m_{6,7} \\ m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{7,4} & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{7,7} \end{bmatrix} :$$

$$> \; F := \sum_{i=1}^{7} \left(\sum_{j=1}^{7} "c"[i,j] \cdot "x"[i,j] \right) :$$

$$> \; obmez := \left\{ \sum_{i=1}^{7} 'x'[i,1] = 1, \sum_{i=1}^{7} 'x'[i,2] = 1, \sum_{i=1}^{7} 'x'[i,3] = 1, \sum_{i=1}^{7} 'x'[i,4] = 1, \sum_{i=1}^{7} 'x'[i,5] = 1, \sum_{i=1}^{7} 'x'[i,6] = 1, \sum_{i=1}^{7} 'x'[i,7] = 1, \sum_{j=1}^{7} 'x'[1,j] = 1, \sum_{j=1}^{7} 'x'[2,j] = 1, \sum_{j=1}^{7} 'x'[3,j] = 1, \sum_{j=1}^{7} 'x'[4,j] = 1, \sum_{j=1}^{7} 'x'[5,j] = 1, \sum_{j=1}^{7} 'x'[6,j] = 1, \sum_{j=1}^{7} 'x'[7,j] = 1 \right\} :$$

$> \; S := LPSolve(F, obmez, assume = binary);$

$$S := [1260, [m_{1,1} = 0, m_{1,2} = 0, m_{1,3} = 0, m_{1,4} = 0, m_{1,5} = 0, m_{1,6} = 0, m_{1,7} = 1, m_{2,1} = 0, m_{2,2} = 0, m_{2,3} = 0, m_{2,4} = 0, m_{2,5} = 0, m_{2,6} = 1, m_{2,7} = 0, m_{3,1} = 1, m_{3,2} = 0, m_{3,3} = 0, m_{3,4} = 0, m_{3,5} = 0, m_{3,6} = 0, m_{3,7} = 0, m_{4,1} = 0, m_{4,2} = 0, m_{4,3} = 0, m_{4,4} = 0, m_{4,5} = 1, m_{4,6} = 0, m_{4,7} = 0, m_{5,1} = 0, m_{5,2} = 0, m_{5,3} = 1, m_{5,4} = 0, m_{5,5} = 0, m_{5,6} = 0, m_{5,7} = 0, m_{6,1} = 0, m_{6,2} = 1, m_{6,3} = 0, m_{6,4} = 0, m_{6,5} = 0, m_{6,6} = 0, m_{6,7} = 0, m_{7,1} = 0, m_{7,2} = 0, m_{7,3} = 0, m_{7,4} = 1, m_{7,5} = 0, m_{7,6} = 0, m_{7,7} = 0]] \quad (1)$$

Отриманий результат у вигляді таблиці

```
> assign(S[2]);
> 'x'=x;'F'=F;
```

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = 1260 \qquad (2)$$

Розв’язання цієї задачі привело до висновку, що мінімальна собівартість виконання замовлень становить F = 1260 (ум. одн.). При цьому
1- ше замовлення буде виконуватися сьомим заводом,
2-ге замовлення – шостим заводом,
3-тє замовлення – першим заводом,
4-те замовлення – п’ятим заводом,
5-те замовлення – третім заводом,
6-те замовлення – другим заводом,
7-ме замовлення – четвертим заводом.

Література

1. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. Математичне програмування: Навчальний посібник / О.В. Бех, Т.А. Городня, А.Ф. Щербак – Л.: “Магнолія 2006”, 2007. – 200 с.
2. Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. Дослідження операцій в транспортних системах: Навчальний посібник / Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. – Л.: ЛДУ БЖД, 2019. – 196 с.
3. Махней О.В., Гой Т.П. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 2013. 304 с.

С. Кулькова
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВСТАНОВЛЕННЯ ЗАКОНУ ПРО ПРИРІСТ НАСЕЛЕННЯ ДЕЯКОГО МІСТА

У різних сферах діяльності людини виникає багато процесів, які описуються рівняннями, що містять похідні функцій. Це так звані диференціальні рівняння. Нас цікавить певна функціональна характеристика даного процесу, зокрема залежність від часу деякої функції, що його описує. Якщо повна інформація про хід цього процесу є достатньою, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю буде диференціальне рівняння, одним із розв'язків якого і є шукана функціональна залежність [1,2].

Розглянемо задачу про приріст населення.

Задача. Встановити закон приросту населення $N = N(t)$ у деякому місті, якщо відомо, що в момент часу, взятий за початковий, населення міста становило $N_0 = 50000$ людей, а через рік зросло на 4 %. [3]

Складемо математичну модель та знайдемо розв'язок задачі.

Будемо вважати, що швидкість приросту населення прямо пропорційна кількості населення. Швидкість зростання чисельності населення – це похідна за часом t від функції $N(t)$, що визначає кількість населення, тобто $\dfrac{dN(t)}{dt}$. Виходячи з умов задачі складемо диференціальне рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N(t),$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Відокремивши змінні, приходимо до диференціального рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = k \cdot dt. \tag{1}$$

Проінтегруємо ліву та праву частини рівняння (1). Матимемо

$$\ln N(t) = k \cdot t + \ln C.$$

Використовуючи основні властивості логарифмів, після потенціювання, одержуємо таку залежність

$$N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}. \tag{2}$$

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ населення міста була відома і становила $N_0 = 50000$, тоді початкова умова матиме вигляд

$$N(0) = 50000.$$

Підставляючи початкову умову у рівність (2), матимемо

$$50000 = Ce^{k\cdot 0},$$

звідси $C = N_0 = 50000$.

Таким чином, залежність приросту населення від часу має експоненціальний характер (рис. 1)

$$N(t) = 50000 \cdot e^{k\cdot t}. \tag{3}$$

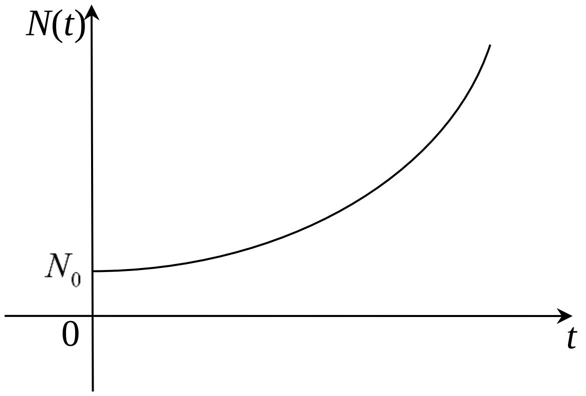


Рис. 1. Графік залежність приросту населення від часу

У виразі (3) залишається невідомим коефіцієнт *k*. З умови задачі відомо, що через рік ($t=1$) чисельність населення зросла на 4 % і досягла

$$N_0 + 0,04N_0 = 1,04 \cdot N_0 = 1,04 \cdot 50000 = 52000.$$

Використовуючи цю умову із (3) знайдемо

$$52000 = 50000 \cdot e^{k\cdot 1},$$

звідки $e^k = \dfrac{52000}{50000} = 1,04$.

Підставляючи значення множника e^k у (3), дістанемо функцію

$$N(t) = 50000 \cdot 1,04^t,$$

що виражає закон приросту народонаселення в цьому місті.

Література

1. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.
2. *Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін.* Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. – Л. Вид. Національного університету “Львівська політехніка”, 2001. – 244 с.
3. *Герасимчук В.С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов // Навч. посіб. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 578 с.

Т. Пекарюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Чмир О.Ю.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАДАЧА ПРО ПОГЛИНАННЯ СВІТЛОВОГО ПОТОКУ

Найбільш ефективними методами вивчення різноманітних фізичних процесів і явищ є створення та використання математичних моделей, які допомагають зрозуміти фізичний процес, дають можливість установити якісні та кількісні характеристики його стану. Використовуючи математичні моделі можна передбачити певний подальший розвиток процесу.

Вивчаючи фізичні явища можна виявити деяку функціональну залежність між невідомими характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять похідні невідомих характеристик процесу. У багатьох випадках такою залежністю буде диференціальне рівняння [1, 2].

Розглянемо прикладну задачу, яка приводить до диференціального рівняння першого порядку.

Задача. Поглинання світлового потоку тонким шаром води є пропорційним до товщини шару і потоку, що падає на його поверхню. При проходженні через шар завтовшки 1 м поглинається чверть початкового світлового потоку. Яка частина світлового потоку проникне на глибину $h=6$ м, якщо початкова інтенсивність світлового потоку дорівнює I_0? [3]

Складемо математичну модель та знайдемо розв'язок задачі.

Нехай $I=I(h)$ – інтенсивність світлового потоку, що падає нормально на плоску межу поділу середовищ і проникає, поступово загасаючи, на глибину h. Відповідно до умови при проходженні через шар води завтовшки dh поглинається світловий потік dI:

$$dI(h)=-k\cdot I(h)\cdot dh.$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак "–" свідчить про спадання світлового потоку.

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні, приходимо до диференціального рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dI(h)}{I(h)}=-k\cdot dh. \tag{1}$$

Проінтегруємо ліву та праву частини рівняння (1). Матимемо

$$\ln I(h)=-k\cdot h+\ln C.$$

Використовуючи основні властивості логарифмів, після потенціювання, одержуємо таку залежність

$$I(h)=C\cdot e^{-k\cdot h}. \tag{2}$$

Визначимо сталу інтегрування, припустивши, що на поверхні води ($h=0$) інтенсивність світлового потоку $I(0)=I_0$. Тоді

$$I_0 = Ce^{-k\cdot 0},$$

звідси $C = I_0$.

Таким чином, інтенсивність світлового потоку залежно від глибини його проникнення описується законом експоненціального спадання

$$I(h) = I_0 \cdot e^{-k\cdot h}. \qquad (3)$$

У виразі (3) залишається невідомим коефіцієнт k, який називають лінійним коефіцієнтом згасання. З умови задачі відомо, що при проходженні через шар завтовшки 1 м поглинається чверть початкового світлового потоку, тобто $I(1) = \frac{3}{4} \cdot I_0$.

Використовуючи цю умову із (3) знайдемо

$$\frac{3}{4} \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{-k\cdot 1},$$

звідки $e^{-k} = \frac{3}{4}$.

Підставляючи значення множника e^{-k} у (3), дістанемо функцію

$$I(h) = I_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^h,$$

що виражає закон поглинання світлового потоку.

Таким чином, на глибині $h=6$ м інтенсивність світлового потоку становить

$$I(6) = I_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0{,}18 \cdot I_0,$$

тобто на таку глибину проникає менше п’ятої частини початкового світлового потоку.

Література

1. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.
2. *Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін.* Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. – Л. Вид. Національного університету “Львівська політехніка”, 2001. – 244 с.
3. *Герасимчук В.С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов // Навч. посіб. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 578 с.

Є.С. Гапончук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНА БІОЛОГІЯ ТА МЕДИЧНА МАТЕМАТИКА

Математична біологія та медична математика пов'язані з застосуванням різноманітних математичних методів та моделювання для дослідження різних біологічних процесів та фізіологічних систем.

Математична біологія досліджує математичні моделі живих систем, зокрема, біологічних та екологічних систем. Математичні моделі використовуються для вивчення поведінки різних видів організмів, від молекул до екосистем. З їх допомогою можна вивчати динаміку розвитку популяцій, еволюційні процеси та динаміку хвороб у популяції. Ще однією важливою областю застосування математичної біології є моделювання біохімічних процесів у клітинах та організмах. Математичні моделі можуть допомогти зрозуміти, як клітини сприймають та реагують на зовнішній вплив, які біохімічні шляхи активуються та як вони взаємодіють між собою. Ці знання можуть бути використані для розробки нових ліків та терапій для різних захворювань.

Медична математика використовує математичні методи та моделювання для аналізу медичних даних та діагностування захворювань, для прогнозування ризику захворювання та визначення оптимального лікування. Прикладом використання медичної математики є моделювання поширення епідемій. Зокрема, моделі можуть бути використані для прогнозування поширення вірусів та інших інфекційних захворювань, що допоможе лікарям та державним органам здоров'я підготуватися та прийняти ефективні заходи для боротьби з епідемією.

Розглянемо приклад використання похідної функції у фармакології. Нехай розчинення лікарської речовини з таблетки описується рівнянням: $m = m_0 \cdot e^{-kt}$, де m_0 - початкова маса в момент часу *t=0, m*- нерозчинена маса на момент часу *t, k*- стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначити швидкість розчинення.

Розв’язання: Масу лікарської речовини, що розчинилася в момент часу t, запишемо у вигляді: $M = m_0 - m = m_0\left(1 - e^{-kt}\right)$. Використовуючи хімічний зміст похідної, визначимо швидкість розчинення: $M' = m_0\left(-e^{-kt}\right)\cdot\left(-k\right) = k \cdot m_0 e^{-kt} = km$.

Крім того, медична математика використовується для проектування та тестування нових медичних приладів та технологій. Наприклад, моделі можуть допомогти визначити оптимальні параметри для створення штучного серця або іншого медичного пристрою. Також, математичні моделі використовуються для аналізу даних з медичних досліджень, що допомагає виявляти зв'язки між різними факторами та захворюваннями. Ці знання можуть бути використані для розробки нових ліків та терапій, які будуть ефективні для певної групи пацієнтів.

Математична біологія та медична математика мають безліч застосувань у різних галузях, ось кілька з них: епідеміологія (прогнозування поширення інфекційних хвороб та визначення ефективність стратегій вакцинації та інших заходів по контролю за захворюваннями), генетика (дослідження генетичної динаміки та взаємозв'язку між генетичними дефектами та захворюваннями), екологія та здоров'я (дослідження взаємозв'язку між екологічними системами та здоров'ям людини, розробка стратегії контролю за забрудненням навколишнього середовища), нейронаука (дослідження функціонування нервової системи та її порушень, розробка методів лікування нервових захворювань), психологія та емоції (дослідження динаміки психічних та емоційних станів людини та їх взаємозв'язок з фізіологічними процесами), оптимізація лікування (розробка оптимальних стратегій лікування різних хвороб, що дозволяє знизити витрати на лікування), біоінформатика (аналіз та інтерпретація біологічних даних, таких як генетичні послідовності, що дозволяє досліджувати феномени, такі як еволюція та розвиток) і т.д.

Отже, математична біологія та медична математика є важливими галузями науки, які допомагають розуміти та контролювати складні процеси в організмах та екосистемах. Застосування математичних методів та моделювання допомагає зрозуміти та передбачити динаміку розвитку різних захворювань, екосистем та біохімічних процесів, що в свою чергу може призвести до розробки нових технологій та терапій, які можуть значно покращити якість життя людей.

Література

1. Ляшенко І. М. Моделювання біологічних та екологічних процесів :навчальний посібник / І. М. Ляшенко, А. П. Мукоєд. – К. :Київський ун-т, 2002. – 340 с.

2. Товстюк Н.К., Середюк Б.О., Микитюк О.Ю. Особливості математичного моделювання у медицині. Розвиток природничих наук як основа новітніх досягнень у медицині: Матеріали науково-практичної інтернет-конференції, м. Чернівці, 27 листопада 2019 р. / за ред. В. І. Федіва – Чернівці: БДМУ, 2019. С. 165-169.

3. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

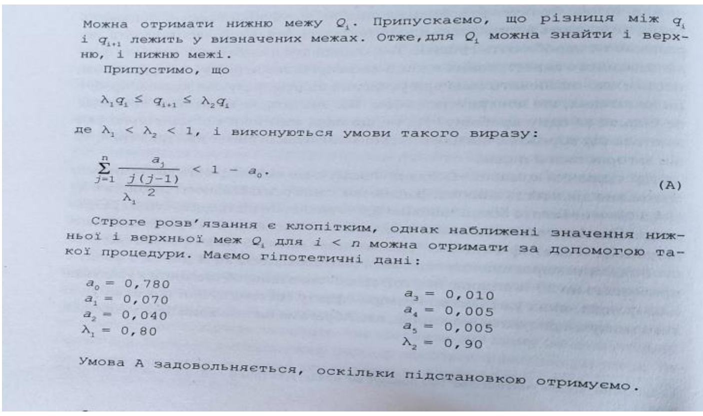
В.І. Слободян
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

СИСТЕМАТИЧНА ПОМИЛКА ВЦІЛІЛОГО

«Математика – це продовження здорового глузду іншими засобами». Дійсно, дуже змістовна фраза, вона розкриває всю критичну необхідність математики для сталого розвитку світу.

Систематична помилка вцілілого або упередження виживання (англ. survivorship bias), - різновид систематичної помилки добору, коли за однією групою ("тими, хто вижив") є багато даних, а за іншою ("загиблими") - практично немає, внаслідок чого дослідники намагаються шукати загальні риси серед тих, хто вижив, і не беруть до уваги, що не менш важлива інформація приховується серед "загиблих". Це одне з багатьох когнітивних упереджень. Наприклад, у Другу світову війну угорському математику Абрахаму Вальду, який працював у нью-йоркській лабораторії SRG, доручили знайти розв'язання важливого завдання. Не всі американські бомбардувальники поверталися на базу. А на тих, що поверталися, залишалося безліч пробоїн від зеніток і винищувачів, але розподілені вони були нерівномірно: найбільше на фюзеляжі та інших частинах, найменше - у паливній системі та набагато менше - у двигуні. Чи означало це, що в пробитих місцях потрібно більше броні? Вальд відповів: ні, дослідження якраз показує, що літак, який дістав пробоїни в цих місцях, ще може повернутися на базу. Літак, якому влучили у двигун або бензобак, виходить з ладу і не повертається. Оскільки влучання від ворожого вогню насправді (у першому наближенні) розподілено рівномірно, зміцнювати треба ті місця, які в літаків, які повернулися, в масі найбільш "чисті". Збільшувати кількість броні всюди – не найкраще рішення, адже вона робить літаки тяжчими, а важчі літаки менш маневрені, і їм потрібно більше пального. Надмір броні – проблема, її брак – теж проблема. Оптимальне рішення посередині. Математичний розум Вальда придумав таке рішення: бронювати частини, де є пробоїни, не потрібно. Бронювати потрібно ті, де пробоїн немає – двигуни. Ідея Вальда полягала у простому питанні: куди щезають пробоїни, яких бракує? Ті, які були на всьому корпусі, якби ушкодження розподілялися на ньому рівномірно? Вальд мав цілковиту певність, що знає це. Пробоїни, яких не вистачало, були на відсутніх літаках. Причина того, що літаки поверталися з набагато меншою кількістю пробоїн у моторних відділення, полягала в тому, що літаки з пробоїнами у двигунах не поверталися. Тоді як велика кількість літаків, що поверталися на аеродроми з порешеченими фюзеляжами, являла собою доказ того, що з пробоїнами у фюзеляжі можна миритися. У цій ідеї захований старий математичний прийом, що прояснює картину гранично чітко: прирівняти деякі змінні до нуля. У нашому випадку така змінна – це ймовірність того, що літак, який отримав ураження двигуна, залишається у повітрі. Прирівняти ці змінні до нуля означає, що єдине ураження двигуна гарантовано збиває літак.

Чому Вальд розумів те, чого не розуміли військові, що значно більше знали про війну в повітрі. Усе зводиться до натренованого математичного мислення. Він знайшов ефективне рішення проблеми, але що тут математичного? Насправді, Вальд користувався формулами та виконував складні розрахунки. На рис.1можемо побачити лише фрагмент записів Вальда.



Можна отримати нижню межу Q_1. Припускаємо, що різниця між q_i і q_{i+1} лежить у визначених межах. Отже, для Q_1 можна знайти і верхню, і нижню межі.

Припустимо, що

$$\lambda_1 q_i \le q_{i+1} \le \lambda_2 q_i$$

де $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$, і виконуються умови такого виразу:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_1^{\frac{j(j-1)}{2}}} < 1 - a_0. \qquad (A)$$

Строге розв'язання є клопітким, однак наближені значення нижньої і верхньої меж Q_i для $i < n$ можна отримати за допомогою такої процедури. Маємо гіпотетичні дані:

$a_0 = 0,780$
$a_1 = 0,070$
$a_2 = 0,040$
$\lambda_1 = 0,80$
$a_3 = 0,010$
$a_4 = 0,005$
$a_5 = 0,005$
$\lambda_2 = 0,90$

Умова A задовольняється, оскільки підстановкою отримуємо.

Рис.1

Отже, математика є однією з найбільш важливих дисциплін, яка відіграє важливу роль в багатьох аспектах життя.

Література

1. Джордан Елленбер «Як ніколи не помилятися (сила математичного мислення), «Наш формат», Київ, 2020. – 407 с.
2. Упередження виживання – Вікіпедія uk.wikipedia.org
3. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

А.В Афонова
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **І.В. Шевчук,** викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ДЕЯКІ СПОСОБИ ШВИДКИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Найважливішим завданням вивчення математики є оволодіння математичними знаннями та вміннями, які будуть потрібні у повсякденному житті кожній людині. Саме обчислення є одним з головних вмінь на якому ґрунтується математика. Без обчислень не вдається вирішити жодне математичне завдання. Окрім того обчислення чудово активізує увагу, пам'ять, сконцентрованість та сприяє розвитку креативного і логічного мислення.

Виконання усних та нескладних обчислень формує потребу продукування уявних експериментів для вирішення завдань, припущень та здогадів в голові (подумки), а потім перевірку істинності цих припущень. З'являється потреба в ознайомленні з додатковими засобами усних і письмових обчислень, які б значно допомогли заощадити час на написання, обрахунку і запис розв'язку, а також спростити спосіб обчислення без використання різноманітних обчислювальних засобів.

Є багато способів швидких обчислень, як усних так і письмових. Для усних способів потрібно додати більше концентрації та уяви. Наприклад, уява чисел в голові при додаванні чисел (десятків, сотих, тисячних). Кожен може обраховувати по-своєму, але є методи, які значно спрощують обчислення.

Розглянемо деякі методи швидких обчислень. Для найпростішої дії додавання або віднімання десяткових чи сотих потрібно їх розкладати на розряди, що спростить хід обрахунку. Для дії множення можна використати «Японський спосіб множення», де потрібно кожному числу намалювати відповідну кількість ліній, а потім порахувати їх перетини. Найпростішим способом множення на 9 є «Множення на 9 за допомогою пальців». «Множення на 5 та 25». Для спрощення множення чисел на 5 до числа дописується 0, а потім ділиться на 2. А щоб помножити число на 25 потрібно помножити його 100 і поділити на 4. Для множення великих чисел можна скористатися методом «Алгоритм аль Хорезмі» . Для дії ділення можна використати метод «Ділення кутом», який є простим і зрозумілим. Для додавання та віднімання дробів можна скористатися способом під назвою «Метелик», він значно зекономить час та зменшить ймовірність помилок з обчисленням дробів, які багатьом здаються непростими.

В Україні найдавнішими засобами лічби були пальці рук, різні дрібні предмети. Так, при лічбі на пальцях, або, як називали, на колодочках, на одній руці було прийнято налічувати 15 «колодочок» з долоні та 15 — з іншої частини цієї ж руки. З предметів використовували картоплини, квасолинки, палички та ін. Для економії лічби існували числові групи: пара, трійка, п'ятка, десяток, копа тощо. Парами лічили худобу, птицю, хатнє добро (чоботи, підошви), трійками —

нитки у прядиві (три нитки складали чисницю), п'ятками — снопи, десятками — яйця, гарбузи, кавуни, копами — яйця та снопи.

Пропоную для розгляду загальні прийоми усного рахунку.

Наприклад треба додати числа 28, 47, 32 і 13.

а) користуючись десятковим складом числа, розкладемо кожний з доданків на розряди

28=20+8, 32=30+2, 47=40+7, 13=10+3.

б) застосовуючи сполучні і переставні властивості:

(20+30)+(8+2)+(40+10)+(7+3)=50+10+50+10=120.

Розглянемо деякі інші методи.

Правило 1. Якщо один із доданків збільшити *на* кілька одиниць, то із здобутої суми треба відняти стільки ж одиниць.

364+592 =364+(592+8)-8=364+600-8=964-8=956.

Правило 2. Якщо один із доданків збільшити на кілька одиниць, а другий зменшити на стільки : одиниць, то сума не зміниться.

997+856 = (997+3)+(856-3) = 1000+853 = 1853.

Правило 3. Якщо від'ємник збільшити на кілька одиниць і зменшуване збільшити на стільки ж оди ниць, то різниця не зміниться.

1351 -994 = (1351+6)-(994+6) = 1357-1000 = 357.

Правило 4. Якщо від суми двох чисел відняти різницю цих чисел, то в результаті дістанемо подвоєні менше число, тобто $(a+b)-(a-b) = 2Ь$.

(47+24)-(47-24) = 48.

Правило 5. Якщо до суми двох чисел додати їх різницю, то в результаті дістанемо подвоєне більше число, тобто $(a+b)+(a-b) = 2a$.

(65+34)+(65-34) = 130.

Загалом ці методи не є важкими, навпаки вони допоможуть пришвидшити обчислення завдання, а також спростять його. Крім того, такі методи добре розвиватимуть пам'ять, логіку, мислення та увагу. В житті вони допоможуть заощадити час та ви будете впевнені, що в будь-якому випадку чи місці зможете зробити миттєві обрахунки без калькулятора чи іншого обчислювального пристрою.

Література

1. Я.І. Перельман/ Цікава Алгебра. – Київ: Техніка, 1973.
2. О.Г Черватюк, Г.Д. Шиманська/ Елементи цікавої математики. – Київ: Радянська школа, 1968.
3. Л. Отдатчикова «Народна математика українців», 2011.

С.Б. Бура
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **І.В.Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ПРОГРЕСІЇ В ЖИТТІ ЛЮДИНИ

Послідовність - це порядок, в якому відбуваються події в нашому житті. Життя людини складається з ряду етапів, подій та взаємодій, які відбуваються послідовно одна за одною. Від народження до смерті, від дитинства до дорослості, від освіти до кар'єри - це всі етапи, які ми проходимо в певному порядку. Послідовність надає нашому життю структуру та логіку, допомагає нам розуміти, що кожен етап має своє місце та важливість, і від одного етапу ми переходимо до наступного.

Слово «прогресія» походить від латинського слова «progressio» й означає «рух уперед» (як і слово «прогрес»). Уперше цей термін як математичний ужив у своїх працях римський учений Боецій (V-VI ст.). Прогресії, як часткові види числових послідовностей трапляються у папірусах II тисячоліття до н. е. Перші із задач на прогресії, що дійшли до нас, пов'язані з господарською діяльністю, а саме - з розподілом продуктів, поділом спадку тощо. Найдавнішою задачею на прогресії вважають задачу з єгипетського папірусу Ахмеса Райнда про поділ 100 мір хліба між п'ятьма людьми так, щоб другий одержав на стільки більше від першого, на скільки третій одержав більше від другого і т. д. У цій задачі йдеться про арифметичну прогресію, сума п'яти перших членів якої дорівнює 100. У математиці існує кілька видів прогресій, таких як арифметична прогресія, геометрична прогресія, та інші.

Арифметичною прогресією (a_n) називають послідовність, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число. Це число називають різницею арифметичної прогресії та позначають буквою d (d - початкова буква латинського слова «differentia» - різниця). Відповідно, формула, за якою можна визначити будь-який член даної послідовності має вигляд:

$$a_n = a_1 + d(n-1)\ ,$$

де n - порядковий номер члена послідовності, a_1 - перший член прогресії, d - різниця.

Цікавим і корисним є факт, що будь-який член арифметичної прогресії, починаючи із другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів.

$$a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}.$$

Саме з даною властивістю і пов'язана назва такої послідовності і легко виводиться формула суми n перших членів арифметичної прогресії.

Уже в Стародавньому Єгипті знали і використовували геометричну прогресію, про що свідчить задача, знайдена археологами на папірусі: «У семи осіб по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, з кожного колоса може вирости по сім мір ячменю. Як великі числа цього ряду і їх сума? ».

Геометричною прогресією (b_n) називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число. Це число називають знаменником геометричної прогресії та позначають буквою q (початкова буква французького слова «qwoti» - частка). Знаменник геометричної прогресії може дорівнювати будь-якому числу, крім 0. Для того, щоб визначити довільний член геометричної прогресії використовуємо формулу:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Дана послідовність теж має цікаву властивість: квадрат кожного члена, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів. Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то з рівності випливає, що кожний член такої прогресії, починаючи із другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів.

$$b_n{}^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}\,; \qquad b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$$

З цією властивістю геометричної прогресії і пов'язана її назва.

У сучасному світі ми щодня зустрічаємо як арифметичну так і геометричну прогресії, навіть не підозрюючи цього:

- кількість еретроцитів у крові людини становить приблизно 5 млн (з розрахунку на 1 мм^3 крові) на рівні моря. З підняттям на кожні 600 м. їх кількість збільшується на 1 млн.
- крісла в кінотеатрі розташовані так, що кожен наступний ряд має на одне крісло більше
- бактерії розмножуються поділом: одна бактерія ділиться на дві, кожна з цих двох у свою чергу теж ділиться на дві і т.д.
- на токарному станку прикріплена табличка, де позначено швидкість обертання шпинделя при різних положеннях ручки. Виявляється, ці швидкості не випадкові, а утворюють цілком закономірний ряд, що є геометричною прогресією.
- архітектурні колони, які ми звикли вважати циліндрами, насправді мають форму зрізаного конуса. Для збереження рівномірності напруги від тиску вздовж усієї довжини колони потрібно збільшувати площі її поперечних перерізів. Останні, для пропорційності і міцності, при рівновіддалені одна від одної, становлять геометричну прогресію.
- фінансові піраміди

Література

1. https://knowledge.allbest.ru/mathematics/2c0a65625b2bd79a5c43b89521216d37_0.html.
2. Алгебра: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. К.: УВЦ «Оріон», 2017. 272 с.
3. http://lidia4924.blogspot.com/p/4.html.

СЕКЦІЯ 5. Постаті в математиці

В.Е. Лі
Херсонський аграрно-економічний університет
Науковий керівник ***Т.П. Білоусова****, старший викладач кафедри менеджменту та інформаційних технологій*

ЛЕОН ВАЛЬРАС. ТЕОРІЯ ЕКОНОМІЧНОЇ РІВНОВАГИ

Французько-швейцарський економіст Леон Вальрас є засновником математичного спрямування в економічному аналізі. Він вперше запровадив найбільш загальний критерій ринкової рівноваги – рівність попиту та пропозиції. Вальрас досліджував динаміку обсягів попиту та пропозиції при заданих цінах та створив свою знамениту модель ринкової рівноваги. В цілому Вальрас зробив використання математичних методів обов’язковим елементом економічної науки. Вчений запровадив поняття чотирьох ринків: фінансового, споживчих благ та послуг, ринку праці та капіталу. Він обгрунтував необхідність аналізу економіки як єдиного макроекономічного цілого, зв'язавши різні ринки.

Народився Леон Вальрас 16 грудня 1834 року в Еврe, у Франції. Його мати Луїза Аліна де Сент-Бев була дочкою нотаріуса. Батько Вальраса – відомий французький економіст та філософ Огюст Вальрас. Він заохочував свого сина займатися економікою з особливим наголосом на математиці. Після навчання в Канському коледжі з 1844 по 1850 рік він вступив до ліцею Дуе, де отримав ступінь бакалавра літератури, а згодом й ступінь бакалавра наук. Коли він встпив до Паризької гірничої школи в 1854 році, то зрозумів, що курс підготовки інженера йому не до вподоби. Леон поступово покинув свої академічні дослідження, щоб займатися літературою, філософію та суспільствознавством. Під час своєї молодості в Парижі Леон був журналістом у Journal des Economistes та La Presse з 1859 по 1862 р.; одним із директорів Північної залізниці 1862 р. та керуючим директором банку кооперативних асоціацій у 1865 р. У цьому ж році він читав публічні лекції про кооперативні асоціації. Але він постійно відчував поклик до економічно- математичних досліджень. З зрештою він повернувся до вивчення та викладання економіки. В цій науковій дисципліні він стверджував, що знайшов «задоволення та радощі, подібні до тих, які релігія дає віруючим». Ще в 1860 році в результаті участі в міжнародному конгресі з оподаткування в Лозанні, він привернув до себе увагу Луї Рушонне, швейцарського політика, який домігся призначення Леона в 1870 році на посаду нештатного професора економіки в Академії Лозанні в Швейцарії. У 1871 році Леон Вальрас був призначений там на посаду штатного професора і займав її протягом усієї своєї викладацької кар’єри. Це місце не було ідеальним, оскільки домінуюче мислення в економіці того часу було в Британії. Крім того, оскільки студенти університету Лозанни були більше зацікавлені в тому, щоб стати юристами, ніж стати економістами, Вальрас не мав учнів. У ті часи його економічно-математичні дослідження були неоцінені в повній мірі. Хоча його вплив на економіку був обмеженим за його життя. Цей вплив став набагато більшим, починаючи з 1930-х років. Історик економічної думки Марк Блауг писав, що Вальрас «може бути найчитанішим економістом дев'ятнадцятого століття після Рікардо та Маркса».

Ознайомлення з трактатом фізика Луї Пуансо, в якому описується як взаємопов'язані частини фізичної системи утримуються в рівновазі дією протилежних сил, надихнуло Вальраса на поняття економічної рівноваги. За словами Вальраса, він читав праці Пуансо декілька днів й вирішив використати їх як модель своєї дослідницької програми. З того моменту Леон Вальрас намагався зробити для економічної науки те саме, що Пуансо зробив для фізики і механіки. До нього економісти мало намагалися показати, як ціла економіка з багатьма товарами поєднується разом і досягає рівноваги. В основу своєї теорії рівноваги він поклав дві гіпотези: по-перше, кожен індивід намагається максимізувати отриману корисність, по-друге, на кожному ринку попит рівний пропозиції. Спочатку він побудував систему одночасних рівнянь, щоб описати свою гіпотетичну економіку, що було величезним завданням, а потім показав, що оскільки кількість рівнянь дорівнює числу невідомих, систему можна розв'язати, щоб отримати рівноважні ціни та кількість товарів. Та Леон Вальрас усвідомлював, що сам факт того, що таку систему рівнянь можна розв'язати математично для досягнення положення рівноваги, не означає, що в реальному світі це є можливим. Тож другим важливим кроком Вальраса було моделювання штучного ринкового процесу, який мав би привести систему до рівноваги, і він назвав його «промацування». Промацювання було процесом спроб та помилок, у якому називалася ціна, а учасники на ринку говорили, за якою ціною вони готові продати або придбати товар. Якщо пропозиція перевищує попит, тоді ціна знижуєтьсяє. В результаті, збільшується попит та зменшується пропозиція. Таким чином, ціни «намацують» точку рівноваги.

Головною працею Леона Вальраса є книга «Елементи чистої політичної економії» (1874) і доповнення до цієї книги – «Етюди соціальної економії» (1896) та «Етюди прикладної політичної економії» (1898). Економісти визнали лише першу його роботу, а доповнення визнали лише аргументами соціалістичних поглядів. У даний час існує міжнародне економічне наукове товариство, яке займається вивченням наукової творчості Вальраса та розвитком його ідей – Міжнародна асоціація Вальраса (AIW), заснована у 1997 році з ініціативи професора Д. Уокера. Асоціація проводить наукові колоквіуми, зустрічі та конференції, присвячені творчості вченого.

Література

1. Леон Вальрас. Біографія: https://www.econlib.org/library/Enc/bios/Walras.html
2. Розуміння теорії загальної рівноваги та її альтернатив: https://www.investopedia.com/terms/g/general-equilibrium-theory.asp
3. Walker, Donald A., «Walras, Léon,» The New Palgrave: A Dictionary of Economics, Vol. 4 (Q to Z), John Eatwell et al., eds. (Macmillan Press, 1987), pp. 852–863.:

https://carleton.ca/keirarmstrong/learning-resources/selected-biographies/walras-leon-1834-1910/

4. Вікіпедія. Леон Вальрас: https://uk.wikipedia

К.О. Адаменко
Херсонський аграрно-економічний університет
Науковий керівник ***Т.П. Білоусова****, старший викладач кафедри менеджменту та інформаційних технологій*

ГЕНІАЛЬНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК МИХАЙЛО ОСТРОГРАДСЬКИЙ

Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) – видатний український математик, спеціаліст з математичного аналізу та математичної фізики, гідромеханіки та балістики, аналітичної та небесної механіки. Він досяг вершин математичної думки ще за життя, що в історії буває надзвичайно рідко, сучасники визнали його генієм.

Михайло Васильович народився 24 вересня 1801 року в селі Пашенівка (нині Козельщинський район Полтавської області). Рід Остроградських походить від козацьких старшин. Окрім Михася, в родині було ще два хлопчики (Осип й Архип) та дві дівчинки (Олена та Марія). Майбутній вчений змалечку вирізнявся з-поміж інших дітей, постійно ходив і вимірював різні предмети, намагався дізнатися глибину криниці. У нього завжди в кишені була мотузка з прив'язаним камінцем – це і була його лінійка.

Молодий Остроградський мріяв стати військовим, але навчання у Харківському університеті (1816-1820) вирішило долю майбутнього вченого-математика. В 1820 році він їде продовжувати навчання до Парижа, де на нього звертає увагу сам Лаплас, творець «небесної механіки». У Парижі Михайло слухав лекції видатних французьких математиків: Коші, Фур'є, Лапласа, Монжа, Пуассона, Лежандра, Штурма, Понселе, Біне та інших, які прокладали нові шляхи в математичному аналізі, математичній фізиці та механіці. Опанувавши результати, досягнуті французькою математичною школою, Михайло Остроградський і сам став займатися важливими та актуальними питаннями того часу, часто випереджаючи своїх паризьких колег. Вже в 1825 році, не приховуючи свого захоплення, Лаплас писав: «Остроградський наділений великою прозорливістю і є прекрасним знавцем аналізу нескінченно малих величин...». Коші в мемуарі, надрукованому в журналі Паризької академії наук у тому ж 1825 році, з похвалою відгукується про перші наукові дослідження Остроградського, присвячені обчисленню інтегралів. Коші писав: «...одна молода людина, обдарована великою проникливістю і дуже вправна в обчисленні нескінченно малих, Михайло Остроградський, вдавшись також до використання таких інтегралів (інтегралів із уявними межами) і до перетворення їх у звичайні (визначені), дав нову інтерпретацію формул, мною вище згаданих, і узагальнив інші формули, викладені мною в 19-му зошиті Політехнічної школи. Пан Остроградський люб'язно повідомив головні результати своєї роботи». Праці Михайла Васильовича вирізнялися нестандартністю розв'язання, оригінальністю, глибиною думки. Він зробив значний внесок у розвиток математичної фізики, математичного аналізу, теоретичної механіки, теорії чисел, алгебри, теорії ймовірності, балістики. У галузі математичного аналізу вчений узагальнив формулу зв’язку інтеграла по об’єму з інтегралом по поверхні, відому в науці як «формула Остроградського-Гаусса». Ця формула виражає потік векторного поля через замкнену поверхню через інтеграл від дивергенції цього поля за об’ємом, який обмежений цією поверхнею.

Якщо векторне поле задане диференційованими функціями $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, тоді $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$.

У векторній формі цю формулу можна переписати як: $\iiint\limits_V divFdV = \iint\limits_S FdS$, де F – векторне поле.

Теорема Остроградського застосовується при вивченні процесів, які описуються векторними полями (наприклад, гравітаційним полем, полем напруг, електромагнітним та магнітним полями, полем швидкостей рідини тощо). В усіх його роботах головна увага концентрувалася не на розв’язанні окремих задач, а на встановленні узагальнених теорій. Перелік друкованих робіт вченого налічує понад 100 публікацій.

Критерієм цінності наукової роботи Михайло Остроградський завжди вважав практику. Небагато можна назвати видатних математиків світу, чиї теорії так широко використовувалися б на практиці, як ідеї Остроградського. Наукові досягнення його високо цінували сучасники, він був почесним членом багатьох академій наук світу. Його було обрано академіком Імператорської академії наук у Петербурзі і почесним доктором Віленського і Гельсінгфорського університетів. У 1834 році він став членом Американської, в 1841 році – Туринської, в 1853 році – Римської та в 1856 році – членом-кореспондентом Паризької академій наук.

Михайло Васильович Остроградський був прекрасним педагогом. Вищі спеціальні навчальні заклади вважали за честь мати його в себе професором. Видатні дослідження, багаторічна плідна педагогічна діяльність і створення найпередовішої наукової школи принесли йому заслужену славу найвидатнішого математика свого часу. Слава Михайла Остроградського була такою гучною, що коли молоді науковці виїжджали за кордон вчитися, то їм бажали: «Ставай Остроградським!».

1 січня 1862 року Михайло Остроградський відійшов у засвіти. Згідно з заповітом, Михайла Васильовича поховали там, де він народився – в рідному селі Пашенівка. Серед творінь великих подвижників від науки праці Михайла Остроградського ще довго залишатимуться не почесними архівними експонатами, а дійовим інструментом пізнання глибинних закономірностей природи. У 2001 році ЮНЕСКО внесла Михайла Остроградського до переліку видатних математиків світу.

Література

1. Абліцов В. Галактика «Україна». Українська діаспора: видатні постаті. К.: КИТ, 2007. 436 с.
2. Сергійчук В. Що дала Україна світові. К.: ПП Сергійчук М. І., 2008. 170 с.

М. Мамчур
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДЕЯКІ ФАКТИ ПРО МАТЕМАТИЧНІ ФОРМУЛИ

Скільки років математичним формулам?

Археологічні дослідження показують, що, хто жив у доісторичні часи, мали деяке розуміння математики, записи про які були знайдені на багатьох предметах, таких як кістки та настінні різьблення. Розкопки показали, що первісні люди використовували раціональне мислення, коли навчалися розв'язувати прості математичні задачі, такі як додавання або ж віднімання. The Star Garden стверджує, що: «Кістці Ішанго близько 20 000 років, і на ній вирізано ряд виїмок у трьох стовпчиках. Такі візерунки доводять, що їх зробив хтось, хто розумів додавання, віднімання, множення, ділення та прості числа». У давні часи і вавилоняни, і стародавні єгиптяни знали про число π, про теорему Піфагора тощо. Теорема Піфагора була названа на честь давньогрецького математика Піфагора (хоча деякі кажуть, що ця концепція була розроблена ще задовго до нього). Кеплер, що був натхненний Піфагором і вважав, що рух планет створює музику, використав математику, щоб показати, що планети обертаються навколо Сонця по еліпсах і до 1619 р. він вже зміг визначити час, за який кожна планета обертається навколо Сонця, а також їх відносні відстані до цієї зірки. У 1687 році Ньютон опублікував свій закон всесвітнього тяжіння. Сучасник Ньютона, Лейбніц, виявив ще один зв'язок між математикою і природою, коли вперше розглянув ідею фракталів. Математики двадцятого століття, такі як француз Гастон Жулія та польсько-франко-американський математик Бенуа Мандельброт, надихнулися Лейбніцем на створення власних складних фракталів.

До цього часу квантова механіка і спеціальна та загальна теорії відносності німецько-швейцарсько-американського фізика Альберта Ейнштейна показали, що природа підкоряється законам математики, навіть якщо це суперечить нашому здоровому глузду та розумінню світу.

Отже, як ми бачимо, математика завжди була з нами протягом всієї історії людства, але саме завдяки кваліфікованим математикам, які працювали, щоб відшукати ці математичні таємниці, з'явилася низка визначних проривів.

Підсумовуючи історію математики, важливо зазначити, що, незважаючи на те, що людина не розвинулася з математичного поняття, математика завжди відігравала непересічну роль на нашій планеті. Ще до існування людей, математика керувала всією природою, а також енергією та тваринами, що населяли Землю, в силу узгодження процесів всього живого.

Розглянемо деякі відомі математичні формули.

Теорема Піфагора. Це, безсумнівно, одна з найвідоміших теорем. Ця теорема, яка датується 530 р. до н.е., є однією з основ математики донині, і внесла свій внесок в історію математики з самого моменту її відкриття. Це рівняння має важливе значення для розуміння геометрії та тригонометрії, і воно справді сформувало наше розуміння цих галузей математики.

Логарифми. Логарифми, популяризовані Джоном Нейпіром у 1610 році, поєднують обернені та експоненційні функції і протилежності. Логарифми поширені у формулах, що використовуються в науці, для вимірювання складності алгоритмів і фракталів, а також з'являються у формулах для підрахунку простих чисел.

Закон тяжіння. Хто ніколи не чув про знаменитий закон тяжіння Ісаака Ньютона? Ми знаємо історію про яблуко, яке впало на голову великого мислителя, коли він розмірковував про місяць на нічному небі, у 1687 році. Встановивши зв'язок між цими двома тілами, тобто місяцем і яблуком, Ньютон задумався: чому місяць не падає з неба? Відповідь очевидна тепер: її «утримує» гравітаційна сила. Так народився знаменитий закон тяжіння Ньютона: «Астральні тіла притягуються одне до одного із силою, яка прямо пропорційна добутку їх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між їхніми центрами». Через 200 років після Ньютона, Ейнштейн замінив цю теорію гравітації своєю теорією відносності.

Теорія відносності. Незалежно від того, чи хтось обізнаний у математиці чи фізиці, або нічого не знає з математичного словника, усі знають знамениту формулу Альберта Ейнштейна: $E = mc^2$. Ця формула залишається вирішальною і донині, оскільки показує, що матерію можна перетворювати в енергію і навпаки. Спеціальна теорія відносності ввела ідею про те, що швидкість світла є універсальною, незмінною, і що хід часу не однаковий для тіл, котрі рухаються з різною швидкістю. Навіть сьогодні теорія відносності Ейнштейна залишається важливою для нашого розуміння походження, структури та долі Всесвіту. Математика допомагає нам краще розуміти навколишній світ і є всюдисущою в повсякденному житті.

Теорія хаосу. Теорія хаосу продемонструвала, що неможливо з упевненістю передбачити, що станеться в майбутньому. Це дослідження поведінки динамічних систем. Теорія доводить, що жодні реально існуючі процеси не можна передбачити з упевненістю. Найвідомішою ілюстрацією є так званий «ефект метелика», який показує, що помах крил метелика в Бразилії може призвести до урагану або торнадо в Азії. Іншими словами, найнезначніші речі можуть мати непередбачуваний вплив на наше довкілля, у близькій та далекій перспективі.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. ІІ.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

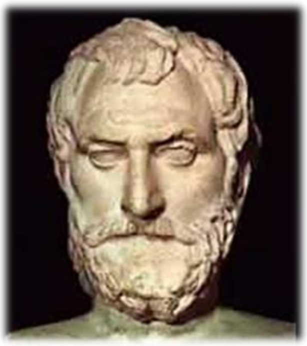
В.О. Єзерська
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ВИДАТНІ МАТЕМАТИКИ СВІТУ

Одним із видатних математиків вважається Архімед (287-212 р. до н. е.) – давньогрецький математик, фізик та інженер, один з найвидатніших вчених античності. Обчислив наближене значення числа π, сформулював основні положення гідростатики, створив низку машин і споруд. Архімед зумів визначити, чи зроблена корона сиракузького тирана Гієрона II з чистого золота або ж ювелір підмішав значну кількість срібла. Питома вага золота на той час вже була відомою, але складність полягала в тому, щоб точно визначити об'єм корони, адже вона мала неправильну форму. Зрештою, коли він приймав ванну, йому в голову прийшла блискуча ідея: занурюючи корону у воду, можна визначити її об'єм, вимірявши об'єм витісненої нею води. Згідно з легендою, Архімед вискочив голий на вулицю з криком «Еврика!», що означало буквально «Знайшов!». Так науковець відкрив основний закон гідростатики, нині відомий як закон Архімеда. Інша легенда розповідає про побудований Гієроном в подарунок єгипетському цареві Птолемею III важкий багатопалубний корабель «Сиракосія», який жодним чином не вдавалося спустити на воду. Архімед спорудив систему блоків, за допомогою якого він зміг виконати цю роботу одним рухом руки. За легендою, Архімед заявив при цьому: «Будь в моєму розпорядженні інша Земля, на яку можна було б встати, я зсунув би з місця нашу». В іншому варіанті, дещо поширенішому, його репліка передається так: «Дайте мені точку опори, і я поверну Землю!».

Архімед

Фалес Мілетський (близько 624-548 рр. до н. е) – грецький математик, астроном і філософ. Він був одним із семи мудреців Греції. У математиці Фалес використовував геометрію для розрахунку висоти пірамід та відстані кораблів від берега. Він є першою відомою людиною, яка використала дедуктивні міркування в геометрії, вивівши чотири слідства з теореми Фалеса.



Фалес Мілетський

Фалес відкрив спосіб визначення відстані від берега до видимого корабля шляхом побудови трикутника, в одній вершині якого знаходиться корабель, а в двох інших точки на суші. Цьому мислителю приписується також спосіб визначення висоти різних предметів, зокрема єгипетських пірамід, за довжиною їх тіні, коли сонце піднімається над горизонтом на 45 градусів. Йоган Карл Фрідріх Гаусс (30 квітня 1777 – 23 лютого 1855) – німецький математик, астроном, геодезист та фізик. Один з найвидатніших математиків в історії людства, якого називають «королем математиків». Неабиякі здібності Карла Гаусса почали з'являтися ще в ранньому віці. Коли дитині ледь виповнилося 3 роки, він вже опанував читанням і письмом. Хлопчик з вражаючою легкістю виконував різні обчислення в розумі, не вдаючись до рахунків та інших пристосувань. Гаусс був настільки піднесений відкриттям методу побудови правильного 17-кутника за допомогою циркуля та лінійки, що при житті заповів, щоб правильний сімнадцятикутник викарбували на його могилі. Але скульптор відмовився це зробити, стверджуючи, що побудова буде настільки складною, що результат не можна буде відрізнити від кола. Але пам'ятник Гауссу, збудований у Брауншвейзі, і встановлений на сімнадцятикутній плиті.

Йоган Карл Фрідріх Гаусс

Література

1.https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%85%D1%96%D0%BC%D0%B5%D0%B4

2. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D1%81

А.І. Саламаха
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***І.М. Сов'як****, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

МИХАЙЛО КРАВЧУК

Михайло Пилипович Кравчук народився 27 вересня 1892 р. в селі Човниця Ківерцівського повіту на Волині в сім'ї землеміра. Він виріс у родині, де розмовляли не лише українською, але й польською, французькою та німецькою. Такі навички та вміння володіти іноземними мовами ще з дитинства надзвичайно допомогли майбутньому видатному математику побудувати його успішну кар'єру.

У 1910 році Михайло Кравчук закінчив гімназію в Луцьку з золотою медаллю, а потім вступає на математичне відділення імператорського Університету Святого Володимира в місті Києві. Уже у студентські роки він опублікував перше самостійне дослідження з теорії комутативних матриць. Після чотирьох років успішного навчання в столиці, Михайло залишився в місті, щоб підготуватися до професорського звання. Вже з 1917 року Кравчук прочитав свою першу лекцію і з цього часу розпочав активно займатися математичними дослідженнями, викладацькою діяльністю та зовсім скоро здобув звання приват-доцента. Він успішно викладав математичні дисципліни в Українському народному університеті, політехнічному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному та сільськогосподарському інститутах, у першій і другій українських гімназіях. За свою наукові дослідження здобув визнання по всьому світу. Його вклад у розвиток сучасної науки складно переоцінити.

Радянська влада обірвала життя видатного волинянина: він був репресований та загинув на Колимі 9 березня 1942 року.

Чи знали ви, що:

- лише перед 75-річчям від дня народження вченого почали з'являтися про нього перші публікації;
- у 1992 році за рішенням ЮНЕСКО було відзначено 100-річчя від для народження видатного волинянина. На честь його ювілею в його рідному селі проклали асфальтну дорогу;
- у тому ж році було відкрито музей на честь Михайла Кравчука та встановлено його погруддя. Проте у 2001 році рішення скасували;
- із 1992 року в НТУУ «КПІ» активно проводяться наукові конференції названі іменем видатного волинянина;

- у Луцьку встановлено меморіальну дошку Михайлу Кравчуку на приміщенні колишньої гімназії, де навчався майбутній учений;
- ім'я Михайла Кравчука у 2002 році було внесено до списку найвидатніших людей світу;
- видано три об'ємні книги М. Кравчука «Науково-популярні праці» (2003), «Вибрані математичні праці» (800 стор., 2002), «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука» («Development of the mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk»;
- у Києві та Харкові названо вулиці на честь Михайла Кравчука;
- Луцька гімназія № 21 носить ім'я математика й розташована на вулиці академіка Кравчука;
- 20 вересня 2012 р. Національний банк України увів в обіг пам'ятну монету номіналом 2 гривні, присвячену Михайлу Кравчуку.

У Луцьку урочисто вшановують пам'ять відомого волинського вченого, присвячують його імені низку заходів та цінують його великий вклад у розвиток вітчизняної та світової науки.

Література

1. Владлен Мараєв. Михайло Кравчук. 2022.

Д-М.Д. Ципан
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***І.М. Сов'як ,***
викладач кафедри прикладної математики і механіки

Марина В'язовська - українка, яка розв'язала задачу століть

Уявіть собі кулі одного розміру, наприклад, помаранчі, які треба упакувати якомога щільніше в різних вимірах. Таку задачу ще в 17-му столітті сформулював німецький математик Іоганн Кеплер. Він же припустив, що для тривимірного простору найкраща упаковка - це викласти кулі пірамідою. Саме так ви бачите на прилавках ринку ті ж помаранчі. Та довести цю теорію вчені змогли лише через 400 років. Рішення розписали на трьохсот сторінках. Відкриття ж українки Марини Сергіївни В'язовської, випускниці механіко-математичного факультету КНУ імені Т. Шевченка, вмістилося лише на 21 сторінці. Щоправда, воно стосується вже упакування куль у восьмивимірному просторі. А вже за тиждень після цього винаходу разом з іншими колегами вона знайшла й рішення для 24-х вимірного простору. Візуалізувати упакування шарів у багатовимірному просторі складно, проте це має велике значення для корекції помилок у мобільних телефонах, інтернеті й космічних дослідженнях - впевнені колеги Марини В'язовської, яка, до речі, нині працює в Берліні.

Народилася в Києві старшою з трьох сестер в родині інженерів (батько — хімік заваду «Антонов»). У дитинстві захоплювалася науковою фантастикою, зокрема творчістю братів Стругацьких.

У Києвському природничо-науковому ліцеї №145 навчалась математики у кандидата фізико-математичних наук Андрія Князюка .

Демонструвала високі результати на учнівських олімпіадах з математики. На останньому курсі ліцею мріяла представляти Україну на Міжнародній олімпіаді з математики. На національному конкурсі лише 12 найкращих учасників запрошуються на тренувальний збір, де відбираються шість членів збірної. Вязовська посіла 13-те місце. У 2002—2005 роках займала призові місця на Міжнародній студентській олімпіаді з математики, здобула перший приз у 2002 та 2005 роках.

У 2001—2009 роках навчалася на Механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка, де здобула бакалаврський (2005, науковий керівник Сергій Овсієнко) та ступінь спеціаліста (2006 рік, науковий керівник Ігор Шевчук). У 2006—2009 навчалася в аспірантурі механіко-математичного факультету імені Тараса Шевченка (науковий керівник Ігор Шевчук). У травні 2010 року захистила кандидатську дисертацію в Інституті математики НАН України за темою «Нерівності для поліномів і раціональних функцій та квадратурні формули на сфері».

2013 року здобула ступінь доктора природничих наук (лат. Doctor rerum naturalium) у Боннському університеті. За роботу над найщільнішими пакуваннями куль у розмірностях 8 та 24, використовуючи модулярні форми, Марині В'язовській у 2016 році присуджено премію Салема. А також:

- 2017 — Дослідницька нагорода Клея;
- 2017 — Премія SASTRA Ramanujan;
- 2018 — Премія Нові горизонти у математиці;
- 2019 — Премія Satter Prize.

У чому ж полягає суть відкриття Марини В'язовської?

Марина В'язовська:

Уявіть, що у нас є багато куль, і ми хочемо ними заповнити простір та, звичайно, не можемо це зробити повністю, адже кулі не мають кутів, і завжди якась частина простору залишиться порожньою. Задача полягає в тому, щоб заповнити кулями якомога більший об'єм. А тепер подумайте, що їх ми можемо розглядати не лише в трьохвимірному, але і в багатовимірному просторі. Наприклад, у просторі з восьми вимірів це буде набір з восьми якихось дійсних чисел. Саме стільки координат нам буде потрібно, щоб зрозуміти, де наша точка знаходиться. І от тепер ми хочемо весь восьмивимірний простір теж заповнити кулями. І тут існує лише одна надзвичайно гарна конфігурація, надзвичайно щільна і називається це решітка Е8. Це і є моє розв’язання.

Марина В'язовська: «Якщо люди не люблять математику, я їх не розумію».

Література

1. Андрій Стасюк. Марина В'язовська — про медаль Філдса та реакцію науковців на війну в Україні. 14 липня 2022

Т. Зубенко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЕВАРИСТ ГАЛУА

Еварист Галуа - французький математик, засновник сучасної алгебри. Ще в підлітковому віці він зміг визначити необхідну і достатню умову для того, щоб многочлен мав корені, вирішивши проблему, яка була відкритою протягом триста років. Його робота заклала основи теорії Галуа та теорії груп — двох основних галузей абстрактної алгебри.

Еварист Галуа народився 25 жовтня 1811 р. у селі Бур-ла-Рен поблизу Парижа. Його батьки були чудово знайомі з класичною літературою, релігійними працями і філософією. До дванадцяти років освітою Евариста займалася його мати. Галуа домагається чималих успіхів у навчанні під керівництвом матері і стає першим по класу латині. Але, у віці 14 років, він втрачає інтерес до всього, крім математики, на якій і зосереджує всі свої зусилля. До лютого 1827 р. він навчається у вищому математичному класі, в якому викладав М. Поверни. Еварист вивчає працю Андриена Марі Лежандра «Основи геометрії» і засвоює його після першого ж прочитання. До п’ятнадцяти років, Галуа читає оригінал Жозефа Луї Лагранжа «Роздуми на тему вирішення алгебраїчних рівнянь», що, швидше за все, і надихало вченого в його роботі над теорією рівнянь.

Він також вивчав «Лекції про обчислення функцій», призначені для професійних математиків. Але його успішність з інших предметів у цей період незмінно падає. У 1828 р. Галуа здає іспити у Політехнічну школу, найпрестижніший вищий заклад Парижа, але провалює їх. Проте в цьому ж році він стає студентом Вищої нормальної школи – інституту, що мав ранг нижче Політехнічної школи, але зустрічає там ряд викладачів, що гідно оцінюють його здібності.

У квітні 1829 р. в журналі “Annales de mathimatiques” Галуа публікує свою першу математичну статтю про безперервні дроби. Приблизно в цей же час він працює над теорією поліноміальних рівнянь, дві статті на тему яких він представив до Академії наук. Августин Луї Коші — великий математик і сучасник Галуа – роботу юнака оцінив високо, але, з невідомих причин, друкувати її відмовився.

Еваріст пробує знову вступити в Політехнічну школу, і знову провалює іспити. Однак різні джерела цей провал пояснюють по-різному. Деякі вважають, що екзаменатор дав юнакові таке нудне завдання, що той, розлютившись, жбурнув у екзаменатора ганчіркою. Більш популярною є версія про те, що екзаменатор просто не встигав за ходом думки Галуа, чим і вивів хлопця з себе. Однак загальноприйнятою стала думка про те, що головною причиною такої дивної поведінки стала саме смерть батька.

Після того, як в Політехнічну школу йому вступити не вдалося, Галуа здає іспити в бакалавріат Вищої нормальної школи. 29 грудня 1829 р. він одержує ступінь бакалавра. За словами його екзаменатора з математики, «юнакові іноді буває важко висловити свої думки, однак він прекрасно освічений і проявляє видатні здібності до дослідження питання». Галуа відправляє ряд своїх статей Коші, і раптом наштовхується на роботу Абеля, яка перекликається з його власними дослідженнями. У лютому 1830 р. Коші пропонує Галуа дослідити в новій статті тему «розв'язування рівнянь радикалів». Але, в квітні 1830 р. Фур'є несподівано помирає, стаття Галуа втрачається в архівах і про премії залишається тільки мріяти.

Незважаючи на ці невдачі, Галуа за цей рік встигає закінчити ще три роботи. Одна з цих статей закладає основи теорії Галуа. Друга стосується чисельного рішення рівнянь. Третя ж внесла вагомий вклад у теорію чисел, вперше сформулював теорію кінцевих полів.

У часи Галуа Франція переживала серйозні політичні хвилювання. У липні 1830 р., коли директор Вищої нормальної школи М. Гиньо замкнув студентів, щоб завадити їм взяти участь у масових заворушеннях, Галуа пише лист, де критикує Гиньо, внаслідок чого, в січні 1831 р., з Школи його відраховують.

Галуа був залучений в ряд республіканських організацій – «Організацію республіканської артилерії Національної гвардії Франції» і «Суспільство друзів народу» — і ділив свій час між роботою над математикою і політичною діяльністю.

30 травня 1832 р. Галуа гине на дуелі. Справжня причина цієї події не зрозуміла донині, його знайшов якийсь селянин. Вченого доставили в лікарню, де той на наступний ранок помер. На момент загибелі йому було 20 років.

Література

1. *Anciaux H., Guilfoyle B.* On Three-Dimensional Blaschke-Lebesgue Problem (англ.) // Proceedings of the American Mathematical Society. - Providence : American Mathematical Society , 2011. - Vol. 139, no. 5 . - P. 1831 - 1839 . - ISSN 0002-9939 . - Doi : 10.1090/S0002-9939-2010-10588-9 . arXiv : 0906.3217

2. https://mykniga.com.ua/biograph/biografiya-evarista-galua.html.

3. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

О.М. Іващишин
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПАРАДОКС МОНТІ ГОЛЛА: КОЛИ ІНТУЇЦІЯ НЕ ЗАВЖДИ ПРАЦЮЄ В ІГРАХ НА ВИПАДКОВІСТЬ

Парадокс Монті Голла — це знаменита головоломка, яка називається так на честь ведучого програми "Let's Make a Deal" Монті Голла. Ця гра була популярна у 1960-х в США. Формат Let's Make a Deal передбачає укладання угод із ведучим гри та відібраних членів аудиторії студії, яких називають «трейдерами». У більшості випадків торговцю запропонують щось цінне та нададуть вибір, зберегти це чи обміняти на інший товар.

Механізм гри:
Механізм гри, який визначає програму, полягає в тому, що інший предмет приховано від трейдера, доки цей вибір не буде зроблено. Таким чином, трейдер не знає, чи отримує він щось рівноцінне або більше, чи приз, який називають «зонком», предмет, який навмисно вибрано так, щоб мати невелику цінність. Отже, уявіть, що берете участь у грі у якій головний приз це автомобіль, який захований за однією з трьох дверей, а за двома іншими дверима знаходяться вівці. Ведучий гри пропонує вам вибрати одну з трьох дверей: першу, другу або третю. Зрозуміло, що ваша ціль вибрати двері за якими знаходиться автомобіль, а не вівця.

Уявімо, що ви вибрали перші двері, тому ведучий спеціально для вас, щоб допомогти або навпаки збити з пантелику, відчиняє інші двері, наприклад, другі за якими знаходиться вівця, тобто автомобіль знаходиться в інших дверях. Тепер “хороший” ведучий дозволяє вам, якщо хочете поміняти свій вибір і змінити двері.

Отже ваші дії, чи поміняєте ви свій вибір чи залишите перші двері?

Наприклад, ви не поміняли двері, згодом ведучий відчиняє двері і вітаю вас, ви виграли вівцю. Отже, парадокс полягає у тому, що, якщо б ви поміняли свій вибір і змінили двері, то з набагато більшим шансом виграли б автомобіль.

Розглянемо всі можливі варіанти розташування овець та автомобіля:

1. Вівця	2. Автомобіль	3.Вівця
1. Автомобіль	2.Вівця	3.Вівця
1. Вівця	2. Вівця	3. Автомобіль

Отже, до прикладу ви вибрали перші двері.
В першому випадку ви вибрали вівцю, тому ведучий відкриє треті двері.
В другому випадку ви вибрали автомобіль, тому ведучий відкриє другі або треті двері. В третьому випадку ви вибрали вівцю, тому ведучий відкриє другі двері.

Давайте розглянемо ситуацію, коли ви зміните свій вибір.

Розглядаючи перший випадок, якщо ви змініте свій вибір, ви виграєте автомобіль. Розглядаючи другий випадок, якщо ви зміните свій вибір, ви отримаєте вівцю. Розглядаючи третій випадок, ви знову ж таки виграєте автомобіль. Таким чином, змінюючи свій вибір, в двох з трьох випадків, ви виграєте автомобіль, а не змінюючи свій вибір в двох випадках з трьох, що і треба було довести.

Давайте розглянемо випадок, коли є 100 дверей і тільки за одними з них, автомобіль. Ви вибираєте 25 двері, а ведучий відкриває 98 інших дверей з вівцями, залишаючи вам двоє дверей. Двері, які ви вибрали і двері, за якими автомобіль. Шанс того, що приз знаходиться за дверима № 25 1% зі 100%, а якщо ви зміните свій вибір, то шанс виграти приз буде 99% зі 100%.

Це називається парадоксом, оскільки це протирічить інтуїції більшості людей. Більшість з нас можуть думати, що ймовірність перемоги при не зміненому виборі залишається такою самою, але якщо подумати, то в деяких випадках варто змінити свій вибір.

Література

1. ***https://youtu.be/U6Gc1IIa5GM***
2. ***https://uk.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Монті_Голла***
3. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

М. Мамчур
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ У ФОРМУВАННІ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Роль математики в житті кожної людини і суспільства складно переоцінити. Саме вона формує фундамент для економічного, технічного зростання суспільства, для розвитку особистостей, які формують його потенціал. Із давніх часів математика пройшла довгий і плідний шлях, хоча і складний та стала потужною галуззю науки, із абстрактної науки перетворилася у виробничу силу.

На сучасному етапі розвитку людства математичні знання проникли в сутність у всіх явищах нашого суспільства. У сучасних умовах підвищення якості математичної освіти на усіх рівнях (дошкільної, початкової, загальної середньої, вищої освіти) є необхідною умовою формування інноваційного суспільства та конкурентоспроможної економіки України.

У преорітеті суспільної думки має бути аксіома, що математика є ефективним інструментом моделювання й дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності, базовим компонентом загальної та професійної освіти сучасної людини, дієвим засобом розвитку мислення, просторової уяви й уявлень, наукового світогляду особистості, невід'ємною складовою загальнолюдської культури.

Математика завжди навколо нас, де б ми не були. Незалежно від того, чи це будівництво будинку, планування вулиць, створення автомобіля чи увімкнення посудомийної машини, майстрування чи гра на скрипці – це складна або ж елементарна математика.

Це все математика. Немає жодного існуючого об'єкта, який би не демонстрував математику в дії. Складні рівняння з багатьма невідомими, радикальні математичні теореми, що сягають античності, відкриття кінця двадцятого століття — все це збудувало наш теперішній світ**.** І з кожною новою концепцією наше розуміння фізичного світу навколо зростає**.**

Тому навчання математики – є однією із найголовніших умов розв'язування різних прикладних задач в курсі математика. У методиці навчання математики існують різні тлумачення поняття “прикладна спрямованість”: розрізняють поняття “прикладна” і “практична” спрямованість. “Прикладна спрямованість навчання математики – це орієнтація змісту і методів навчання на застосування математики в техніці і суміжних науках; у професійній діяльності; в народному господарстві і побуті”. Згідно з таким тлумаченням міжпредметні зв'язки охоплюються поняттям “прикладна спрямованість”.

Прикладна спрямованість сприяє формуванню наукового світогляду і показує роль математики в сучасному виробництві, економіці, науці тощо.

Практична спрямованість навчання математики – "це спрямованість змісту і методів навчання на розв'язування задач і вправ, на формування у школярів та студентів навичок самостійної діяльності математичного характеру».

Деякі вчені вважають, що "прикладна спрямованість» математичних знань повинна означати як їх практичне застосування, так і їх теоретичне значення в самій математиці. Лише в цьому випадку буде виховуватися в учнів та студентів справжня повага до сили наукових знань". Прикладна спрямованість навчання математики найбільше реалізується при розв'язування прикладних задач. Під прикладними задачами здебільшого розуміють задачі, які виникають поза курсом математики і розв'язуються математичними методами і способами.

Сформулюємо основні вимоги до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики. Задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань. Задачі повинні відповідати відповідним навчальним програмам і підручникам за формулюванням і змістом методів, і фактів, які будуть використовувати в процесі їх розв'язування.

Задачі повинні бути сформульовані доступною і зрозумілою мовою, не містити термінів, з якими учні чи студенти не зустрічалися і які вимагатимуть додаткових пояснень. Числові дані в прикладних задачах повинні бути реальними, відповідати існуючим на практиці. У змісті задачі по можливості повинен бути відображений особистий досвід учнів, місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання математичних знань і викликати в учнів пізнавальний інтерес. Прикладні задачі повинні відображати ситуації виробничого і сільськогосподарського виробництва, економіки, торгівлі, ілюструвати застосування математичних знань у конкретних професіях людей.

У прикладних задача числові дані, як правило, мають бути наближеними, а при їх розв'язуванні необхідно використовувати обчислювальні засоби. Сама задача може мати багаторівневе розв'язання, при якому кожний наступний етап розвиває і доповнює попередній. Тому формування вмінь та навичок у розв'язуванні прикладних задач – одне із найголовніших завдань математики для здобувачів освіти.

Література

1. Руська Р.В., Алілуйко А.М., Мартинюк О.М., Новосад І.: Прикладна математика Частина І. Навчальний посібник. Тернопіль. – 2020.- с.98.
2. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.
3. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

Г.А. Альфавіцька
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

«КОРОЛЬ ЛЮБИТЕЛІВ». П’ЄР ФЕРМА

П'єр Ферма народився в Тулузі, Франція у 1601 році. Його батько був торговцем і не вважав математику важливою справою, але молодший Ферма дуже захопився математикою і зробив з неї своє життєве покликання. Він став відомий як один з провідних математиків свого часу і зробив значний внесок у теорію чисел, геометрію і ймовірність.

Принцип "Короля любителів" був вперше сформульований Ферма в одному з його листів до співробітника. Він говорить про те, що якщо *a, b, c* - цілі числа, і якщо $a^n + b^n = c^n$ то *n* повинно бути цілим числом, а не дробовим. Цей принцип став основою теореми Ферма, яка була доведена більш ніж за три століття після того, як Ферма вперше сформулював її.

Теорема Ферма є однією з найвідоміших теорем у математиці. Вона говорить про те, що неможливо знайти цілочисельні розв'язки рівняння $a^n + b^n = c^n$, коли *n* більше за 2. Ферма довів цей факт для n=4. Це єдине доведення за допомогою елементарних засобів. Елементарного її доведення не існує для n > 2, за винятком n = 4 . Для n = 3 теорему Ферма довів Л.Ейлер в 1768 р. Для n = 5 майже одночасно PHYSICAL & MATHEMATICAL EDUCATION issue 3(6), 2015 . 56 запропонували свої доведення в 1825 р. Л.Діріхле і А.Лежандр. Для n = 7 теорема Ферма була доведена в 1839 р. Г.Ламе. Німецький математик Е.Куммер (1810-1893) за допомогою створеної ним теорії алгебраїчних чисел довів теорему Ферма для всіх n <100. За це доведення він отримав Великий приз Паризької Академії наук в 1857 р.

В 1929 р. Вандівером було доведено справедливість теореми Ферма для всіх *n* <100000 . В кінці XX ст.(вересень 1994р.) англійський 42-річний математик Ендрю Уайлс, представив бездоганне доведення теореми. Так завершилась 350-річна історія доведення Великої теореми.

Хоча Ферма ніколи не довів свою теорему, його принцип "Короля любителів" виявився дуже важливим для розвитку математики. Зокрема, цей принцип став важливим принципом у теорії груп, алгебри і теорії чисел. Він також вплинув на розвиток інших математичних теорій, таких як теорія криптографії, диференціальних рівнянь і теорії ймовірностей.

Принцип Ферма допоміг стимулювати інтерес до математики, зокрема, серед людей, які не були професійними математиками. Багато людей почали вивчати математику відповідно до Ферма - як хобі або захоплення. Це призвело до значного збільшення кількості людей, які стали цікавитися математикою та її застосуваннями. Таким чином, принцип "Короля любителів" П'єра Ферма став важливим підґрунтям для розвитку математики та її застосувань. Він надихав людей вивчати математику як захоплення і розвивати нові теорії, що зробило можливим використання математики у багатьох галузях науки та технології.

Цікаво відзначити, що рівняння $a^n + b^n = c^{n+1}$ для довільного $n \in$ N має натуральні розв'язки, наприклад, $a = b = c = 2$. А рівняння $a^n + b^n = c^{n-1}$ має натуральні розв'язки $a = b = 2^{n-2}$ $c = 2^{n-1}$ при n $\geq$ 2 .

У загальному, П'єр Ферма та його принцип "Короля любителів" стали символом того, що математика - це не просто наукова дисципліна, а інструмент для розв'язання реальних проблем та викликів. Вона дозволяє нам краще розуміти світ та створювати нові технології, що забезпечують наш прогрес та розвиток як людства.

Література

1. М.Ф. Стасюк Математичні основи криптографії (спеціальні розділи математики). Навчальний посібник. ЛДУБЖД. Львів. -2021.

2. https://uk.wikipedia.org/wiki/Велика теорема Ферма.

3. Вища математика [Електронний ресурс] / Кусій Мирослава Ігорівна. — Режим доступу: **http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1594**

М.І. Збитковський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій,** кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики*

НІКОЛА ТЕСЛА – ВЧЕНИЙ-ДИВАК, ЯКИЙ ТВОРИВ МАЙБУТНЄ

Нікола Тесла (1856-1943) - сербсько-американський винахідник, електроінженер та фізик, який працював над різними проектами, що мали потенціал змінити світ. Тесла був відомий своїм нетрадиційним підходом до науки та винаходів. Він часто зосереджувався на теорії та концепції, які не завжди були практичними на свій час, але пізніше стали основою для розвитку нових технологій.[1, 3] За своє довге життя (Тесла прожив 86 років) він створив понад 800 винаходів. Багато з них людство використовує досі. Серед них: електричний двигун, біполярний транзистор, електростатичний генератор, трансформатор для підвищення частоти сигналу. Тесла розробив прототип дистанційного керування, відкрив низку властивостей рентгенівського випромінювання, досліджував магнітні резонанси і створив ряд пристроїв, які лягли в основу сучасних магнітно-резонансних томографів (МРТ). Ідеї Ніколи Тесли використовуються в бездротових зарядних пристроях та інших технологіях.

У дитинстві він був дуже здібним та інтелектуально обдарованим, але також страждав від нервових захворювань та фобій. Найбільше зацікавлення у нього викликали уроки математики й фізики. Наділений винятковою пам’яттю й інтуїцією, він розв’язував найважчі задачі усно. Пізніше він розповів, що в уяві бачив дошку з готовим розв’язком, це періодично супроводжувалося «світловими явищами».[2]

Тесла був відомий своїм феноменальним математичним розумом і здатністю до розв'язання складних математичних проблем. Він здобув вищу освіту в області математики та фізики, і його знання з цих предметів були важливою складовою його роботи. Він розглядав математику як ключ до розуміння природи та використовував її для розв'язання складних наукових проблем.

Учений постійно подумки рахував власні кроки під час прогулянки, кількість посуду та їжі в ньому, тому не звертав уваги на смак. Усі дії він виконував трьома етапами, і якщо їхня послідовність порушувалася, починав усе спочатку.

Тесла був відомий своїм нетиповим розпорядком дня та незвичайними звичками, однією з яких було розв'язування математичних задач під час сніданку. Він вважав, що розв'язування математичних задач під час сніданку допомагало йому зосередитися та почати день з правильним настроєм.

Вчений був захоплений числами та математикою. Він вважав, що числа мають властивості, які можуть бути використані для зрозуміння та контролю над світом. Іноді він відчував, що його мислення ставало більш чітким та зосередженим, коли він працював з числами, зокрема з числом 3. Тесла ніколи не мав власного житла і мешкав у готелях, але тільки в тих номерах, які були кратні трьом. Він вірив у число 3 як космічну константу, яка має велике значення в усьому Всесвіті. У своїх працях Тесла розглядав число 3 як ключове число, яке відображає триєдність у всьому Всесвіті: час, простір та рух. Він також стверджував, що усе, що існує у Всесвіті, можна виразити за допомогою числа 3.

Загалом, захопленість числами та математикою була важливою частиною творчості Тесли, і він використовував ці знання для створення своїх винаходів та досліджень.

Для формулювання та розв'язання математичних задач, пов'язаних з електромагнітними полями, Тесла використовував векторний аналіз.[2] У своїх дослідженнях Тесла використовував вектори для опису напрямку та інтенсивності електричного та магнітного поля. Він розглядав електричне поле як вектор, який показує напрямок та силу електричного поля. Магнітне поле також було визначене за допомогою векторів, які показували напрямок та інтенсивність поля. Тесла добре знав, як практично застосовувати векторний аналіз. Наприклад, він розробив трансформатори з використанням векторного аналізу, що дозволило йому створити нові способи передачі електроенергії на великі відстані без дротів.

Нікола Тесла зробив вагомий внесок у розвиток теорії диференціальних рівнянь, топології та теорії ймовірностей.[2] У своєму дослідженні руху електричного струму, Тесла розглядав диференціальні рівняння, які описували зміну електричного струму в часі. Він використовував методи розв'язання повних диференціальних рівнянь, запропонованих його вчителем Джеймсом Максвеллом, щоб знайти розв'язки цих рівнянь. Тесла також розробив власний метод розв'язання диференціальних рівнянь, який він назвав "методом механічних коливань". Цей метод використовував механічну аналогію для розв'язання складних диференціальних рівнянь, що дозволяло Теслі робити складні розрахунки з більшою точністю та ефективністю.

Тесла був відомим своєю здатністю працювати з математичними формулами та використовувати їх для вирішення складних проблем. Він стверджував, що для досягнення успіху в науці необхідна глибока математична підготовка та розуміння фізичних принципів.

Життя Ніколи Тесли було взірцем фанатичного служіння науці. Його феноменальні здібності, готовність до самопожертви й одержимість ідеями стали підґрунтям для найвизначніших відкриттів в історії людства.

Література

1. В. Пірус Хроніка життя Нікола Тесли Наука. Освіта. Молодь. Ч. 2, 2022р. С 108-110
2. О. Тищенко Нікола Тесла: одержимий Прометей. НейроNews 3(124) 2021р. С 60-65
3. Ю.Ю. Капшитар, гр. ЕЕ-15, М.В. Кубкін, викл., В.П. Солдатенко Винаходи Ніколи Тесли та роль дослідника у становленні електротехніки як науки. Наукові записки, вип.21, 2017р.

В. Ориник
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ О.С. ПАРАСЮК

Остап Степанович Парасюк – видатний, відомий у світі український математик і фізик-теоретик, член-кореспондент (з 1958р.), академік НАН України (з 1964р). Вся його наукова діяльність пов'язана з Національною академією наук України, Львівським національним університетом імені Івана Франка та Київським національним університетом імені Тараса Шевченка. Остап Степанович Парасюк народився 20 грудня 1921 року у селі Білка, нині Перемишлянського району на Львівщині. Навчався у Перемишлянській гімназії та Львівському ліцеї, який закінчив у 1939 році. У 1940 р. вступив до Львівського університету імені Івана Франка на фізико-математичний факультет, навчання в якому перервала Друга світова війна і мобілізація до армії. Після завершення війни повернувся до Львова, за один рік склав 24 екзамени в університеті і закінчив його достроково з відзнакою у 1947 р. У цьому ж році його було зараховано до аспірантури Львівського відділення Інституту математики АН УРСР за спеціальністю „математична фізика”. Під керівництвом академіка Г.М. Савіна він працює в галузі механіки та у 1949 р. достроково захистив кандидатську дисертацію на тему «Пластичні зони при концентрації напружень довкола отворів». У 1955 р. О. С. Парасюк у Математичному інституті ім. В. А, Стеклова захистив докторську дисертацію на тему «Теорія множення польових операторів». Основу цієї дисертації становлять результати, отримані у співавторстві із відомим у світі математиком Миколою Боголюбовим, що нині відомі як R-операція Боголюбова-Парасюка. Серед цих результатів особливе місце посідала доведена ними ж теорема (отримала згодом назву Боголюбова-Парасюка), яка за визнанням світової наукової спільноти, є фундаментом сучасної квантової теорії поля

У 1949-1951 рр. Остап Степанович Парасюк працює старшим науковим співробітником Львівського відділення Інституту математики, одночасно викладає і читає лекції з механіки та гідромеханіки у Львівському університеті імені Івана Франка студентам механіко-математичного факультету до 1956р., зокрема на кафедрі механіки є куратором студентської групи, формує і підтримує наукові долідження студентів, багато з яких за його рекомендацією згодом поступають в аспірантуру, захищають дисертації формують львівську школу прикладної математики вчених-механіків, серед яких в майбутньому академіки, декани факультету прикладної математики і механіки, провідні викладачі факультету та ВНЗ м. Львова та міст України , а з 1952 року працює заступником директора цього інституту.

З 1956 р. працює в Києві в Інституті математики, з 1963 року очолює відділ теоретичної фізики, де розпочинає свою роботу семінарів з проблем квантової теорії поля, як основи сучасного математичного розуміння природи і походження Всесвіту, а згодом він коректує тематику семінару та відділу, включивши теорію груп Лі та вивчення симетрій. Семінар стає відомим і світовому співтовариству фізиків-теоретиків, тут виступають з науковими доповідями також вчені Європи та США. До середини 1960-х років у відділі теоретичної фізики Інститутту математики під керівництвом Остапа Парасюка склалася потужна українська наукова школа математичної фізики. Серед його учнів добре відомі у світі вчені: Д. Петрина, В. Гачок, В. Фущич, І. Костирко, Д. Тацуняк та інші. З 1966 по 1970 рік Остап Степанович був членом Президії НАН України, академіком-секретарем Відділення фізики та астрономії. Цікавим фактом є те, що саме за його активного сприяння, як відомого в світі математика, НАН України зросла на два нових інститути – Інститут теоретичної фізики та Інститут ядерних досліджень НАН України.

У 1966 р. О.С. Парасюк бере безпосередню участь у створенні нового академічного інституту – Інституту теоретичної фізики АН УРСР – і очолює в ньому відділ математичних методів у теоретичній фізиці. Відділ вже в перші роки існування Інституту теоретичної фізики відвідали відомі вчені США : Дж. Джаффе (Гарвардський університет), В. Петришин (Радгерський університет,), Б. Грубер (Південно-Іллінойський університет,).

Остап Степанович Парасюк був неординарною особистістю. В науці він намагався першим опрацювати свіжі результати з досліджуваної проблематики, за його ініціативою співробітники відділу підтримували контакти з провідними науковцями світу, обговорювали перспективні наукові проблеми. В житті він був людиною раціональною, його життєвим принципом було твердження: « твоя доля – у твоїх руках», був за характером твердим, принциповим. Помер Остап Степанович Парасюк 22 листопада 2007 року після тривалої хвороби, спричиненої переломом ноги на порозі рідного дому. Нагороджений багатьма державними нагородами, орденами, медалями. преміями імені М. М. Крилова НАН України (1982 р.), імені М. М. Боголюбова НАН України (1996 р.) . Заслужений діяч науки і техніки України з 1992 р.

Література

1. Остап Степанович Парасюк (до 70-річчя від дня народження) / М.М. Боголюбов, О.Ю. Митропольський, Д.Я. Петрина, А.М. Самойленко, В.І. Фущич // Український математичний журнал. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1443–1444.

О. Ілечко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВИДАТНІ МАТЕМАТИКИ ТА ЇХ ВІДКРИТТЯ

Архімед (близько 287 до н.е. - 212 до н.е., Сіракузи). Архімед – це давньогрецький математик, фізик та інженер, один з найвидатніших вчених античності. Він винайшов загальні методи обчислення площі криволінійних плоских фігур і об’ємів тіл, обмежених поверхнями, і застосував ці методи до багатьох частинних випадків: до кола, сфери, довільного сегменту параболи, фігури, що розташована між двома радіусами і двома послідовними витками спіралі, до сегментів сфер, сегментів фігур, утворених обертанням прямокутників (циліндри), трикутників (конуси), парабол (параболоїди), гіпербол (гіперболоїди) і еліпсів (еліпсоїди) відносно їх головних осей. Він дав метод обчислення числа π і встановив його. Він запропонував наближений метод обчислення квадратних коренів, сформулював основні положення гідростатики

Мухаммад ібн Муса Ал-Хорезмі (прибл. 783 - 850). Біографічних відомостей про Ал-Хорезмі майже не збереглося. Батьківщиною вченого був Хорезм (нині це частина території Узбекистану та Туркменистану). Світове визнання Ал-Хорезмі принесли його два знамениті математичні трактати - арифметичний і алгебраїчний: "Книга про індійський рахунок" і "Коротка книга про числення алгебри і алмукабали". "Книга про індійський рахунок" стала основним джерелом розповсюдження десяткової позиційної системи числення та запису чисел. Ця система витіснила менш досконалі, що існували до того - алфавітну систему числення греків, громіздку римську нумерацію та інші. Ще більший успіх випав на долю алгебраїчного трактату "Коротка книга про числення алгебри і алмукабали". Трактат поклав початок самостійному розвитку алгебри. У ньому вперше алгебра була представлена як наука про загальні методи розв’язування числових лінійних і квадратних рівнянь.

Рене Декарт (1596 - 1650). Рене Декарт більше відомий, як великий філософ, ніж математик. Але саме він був піонером сучасної математики, його досягнення в цій галузі настільки видатні, що він по праву входить до числа великих математиків. Декарта разом з його співвітчизником П. Ферма вважають основоположником аналітичної геометрії. Він ввів метод прямолінійних координат, зручну алгебраїчну символіку, що збереглася до наших днів, дав поняття змінної величини і функції. Встановив закон збереження кількості руху, ввів поняття імпульсу сили. Праці Декарта рішуче вплинули на розвиток математики.

П’єр Ферма (1601-1665). Видатний французький математик, один із основоположників аналітичної геометрії і теорії чисел, автор робіт в області теорії ймовірностей, оптики, численні нескінченно малих величин. У 1637 році він сформулював так звану Велику теорему Ферма, яка була доведена американським математиком Ендрю Уайлсом лише у 1995 році. Теорема стверджує, що для будь-якого натурального $n>2$ та $x\neq0$, $y\neq0$, $z\neq0$ рівняння $x^n+y^n=z^n$ не можна розв’язати у цілих (та раціональних) числах.

Ґотфрід Вільгельм Лейбніц (1646-1716). Видатний німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець та дипломат. Встановив правила сучасної комбінаторики. Створив першу механічну лічильну машину, здатну виконувати додавання, віднімання, множення й ділення. Незалежно від Ньютона створив диференціальне та інтегральне числення і заклав основи двійкової системи числення. У рукописах і листуванні, які було надруковано лише в середині 19 ст., розробив основи теорії детермінантів. Зробив вагомий внесок у логіку і філософію. Мав надзвичайно широке коло наукових кореспондентів, багато з ідей викладено в рукописах і листуванні, що ще й досі повністю не надруковано.

Леонард Ейлер (1707-1783). Леонард Ейлер - найпродуктивніший математик в історії. Він писав свої наукові праці легко й невимушено, як досвідчений літератор пише листи друзям. За час своєї наукової діяльності вчений написав понад 880 праць, у тому числі ряд багатотомних монографій. Ейлер створив варіаційне числення, надав сучасну форму інтегральному численню, викладенню тригонометрії та арифметики, зробив вагомий внесок у дослідження теорії ймовірностей та її застосувань. Його праці виділили теорію диференціальних рівнянь в окрему дисципліну. Він був, по суті, засновником теоретичної фізики, механіки твердих тіл, гідродинаміки, гідравліки. Багато праць вчений присвятив геометрії, теорії чисел. Мабуть, немає іншого вченого, чиє ім’я згадувалося б так часто в навчальній літературі, як ім’я Ейлера.

Давид Гільберт (1862-1943). Математик-універсал, ім’я якого зустрічається майже в усіх розділах сучасної математики. В 1900 р. на Всесвітньому математичному конгресі Гільберт сформулював 23 важливі математичні проблеми, вирішення яких, сприяло б подальшому розвитку математики. На сьогоднішній день розв’язано 21 проблему із його списку, тобто математикам XXI століття належить завершити почате і відкрити перед собою нові горизонти.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД -2014.

ЗМІСТ