ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

VII Всеукраїнської науково-практичної конференції курсантів та студентів

МАТЕМАТИКА, ЩО НАС ОТОЧУЄ: МИНУЛЕ, СУЧАСНЕ, МАЙБУТНЄ

Львів 2020

ОРГАНІЗАТОР ТА ВИДАВЕЦЬ Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ: ЛДУ БЖД, вул. Клепарівська, 35 м. Львів, 79007

контактні телефони: (032)233-24-79 тел/факс 2330088

Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє: Зб. наук.праць VII Всеукраїнської конф. курсантів та студентів. – Львів: ЛДУ БЖД, 2020 - 123с

Збірник сформовано за матеріалами VII Всеукраїнської конференці курсантів та студентів **«Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє».**

Збірник містить матеріали таких тематичних секцій:

- Прикладні задачі в математиці
- Математичні відкриття, що змінили світ
- Історія математики
- Математика і сучасність

Здано в набір 04.03.2020. Підписано до друку 23.03.2020. Формат 60x841/3. Папір офсетний. Ум. друк. арк. 7. Гарнітура Times New Roman. Друк на різографі. Наклад: 100 прим. Друк: ЛДУ БЖД вул. Клепарівська, 35, м. Львів, 79007. ldubzh.lviv@mns.gov.ua

ці

В.М. Петровський
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник ***М.І. Сорокатий,*** *к.ф.-м.н., доцент, професор кафедри інженерної механіки (озброєння та техніки інженерних військ)*

ЗАЛЕЖНІСТЬ ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ ПІДВІСКИ ВІД ЇХНІХ ПРУЖНИХ ПІДКРІПЛЕНЬ

Збройні сили України оснащені великою кількістю інженерних машин на колісній основі. Робочі органи цих машин в процесі експлуатації зазнають значних навантажень, що приводить їх до передчасного зношування, а за певних умов і до руйнування. Елементи підвіски бойової машини розглядаються як пружні системи, тому до дослідження їхньої поведінки застосовують методи теорії коливань та стійкості. Зокрема, необхідна подальша розробка методів дослідження неперервних та неперервно-дискретних механічних систем, ефективних способів знаходження їхніх частот і критичних навантажень як функцій різних параметрів. Особливе значення має розробка аналітичних методів і отримання на їхній основі інженерних розрахункових формул для оцінки впливу різноманітних факторів: геометричних, жорсткісних, масових характеристик, властивостей навантажень, характеристик середовища і т.п. на малі коливання і стійкість деформівних систем.

Нехтуючи розподіленою масою балки і вважаючи що вантаж і балка після першого дотику не відділяються знайдемо частоту результуючих вільних коливань і її залежність від точки прикладання сили P. При цьому будемо враховувати тільки вплив згинальних моментів).

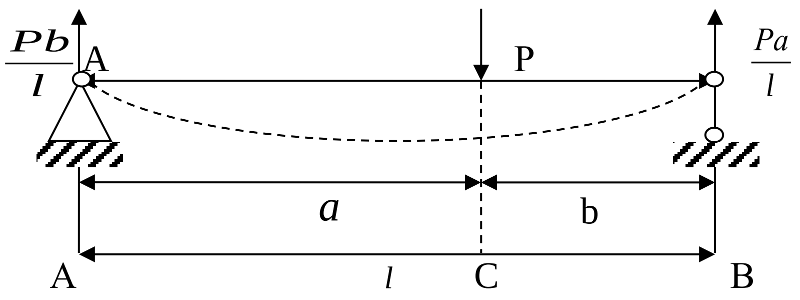


Рис. 1. Схема вільно опертої завантаженої балки

Знайдемо частоту коливань для таких значень:
матеріал балки – двотавр №20; довжина балки $l = 2{,}1 м$; сила P=1000Н, прикладена в точці a =1,4 $м$.Знайдемо частоту власних коливань: $f = 77{,}5 c^{-1}$

Розглянемо тепер вплив пружного закріплення на частоту коливань стержня. Розглянемо випадок, коли лівий кінець балки вільно опертий, а правий пружно закріплений (рис.2) при умові, що розподіленою масою стержня знехтувано. Вважаємо, що стержень має постійний перетин.

Якщо вага балки wl мала у порівнянні із вагою вантажу P, то можна із достатньою точністю припустити, що прогин балки при коливаннях має таку саму форму, як профіль лінії статичних прогинів при дії зосередженого навантаження. У цьому випадку переміщення поперечних перерізів буде таким, як і для невагомої балки, до якої прикладено навантаження

$$W = P + \frac{17}{35} wl$$

Частота коливань при цьому становитиме

$$f = 73{,}8 c^{-1}$$

Похибка у порівнянні із частотою, отриманою без урахування маси балки, становить менше ніж 5%.

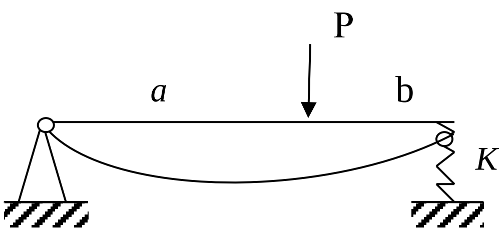


Рис 2. Схема балки із пружно опертим кінцем

Дослідимо вплив жорсткості пружини на частоту коливань, взявши за вихідні дані числові значення попередньої задачі, якщо радіус витка пружини R=5см, радіус перерізу дроту r=1см, кількість витків n=8. Для матеріалу балки і пружини використано сталь Сталь 3.

Частота коливань балки при цьому буде такою:

$$f = 8{,}63 c^{-1}$$

Отже, пружне підкріплення правого кінця балки приводить до істотного зменшення частоти коливань системи вантаж-балка. Частота зменшується більш ніж у 8 разів. Пружні підкріплення елементів підвіски бойової машини здійснюють суттєвий вплив на частоту коливань, а саме: частоти коливань можна істотно змінювати за рахунок пружного закіплення кінців стержня, яким моделюється елемент підвіски. Підбір характеристик металу, із якого виготовляються елементи підвіски, числа витків пружин, на які ці елементи опираються, розмір цих пружин, даватиме змогу змінювати частоти, а отже уникати таких шкідливих явищ, як резонанс.

Література

1. Подригало М.А. Динамика автомобиля / В.П. Волков, А.А. Бобошко, В.А. Павленко, В.Л. Файст, Д.М. Клец, В.В. Редько, М.А. Подригало. Харків: ХНАДУ, 2008. – 424 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко; пер. Я.Г. Пановко с 3-го американ. изд., перераб. совместно с Д.Х.Янгом. – 2-е изд., стер.- М.: URSS; Ком. Книга, 2006. – 439с.
3. Гащук П.В. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. / Л.М. Зорій. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с.
4. Сокіл Б.І. Власні вертикальні коливання корпусу автомобіля з урахуванням нелінійних характеристик пружної підвіски / Б.І. Сокіл, Р.А. Нанівський, М.Г. Грубель // Науково-виробничий журнал "Автомобільний транспорт". – 2013. – №5(235). – С. 15-18.

Г.Є. Максимук
Херсонський національний технічний університет
*Науковий керівник **Г.Я. Тулученко**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики і математичного моделювання*

З ІСТОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ПІДШИПНИКІВ КОВЗАННЯ

Одним із практичних застосувань задачі про рух в'язкої рідини між двома круговими циліндрами є моделювання руху мастила в підшипниках ковзання.

Найпростіше рівняння у циліндричних координатах моделює рух в'язкої рідини між вісесиметричними циліндрами нескінченної довжини радіусів R_1 і R_2 $(R_1 < R_2)$, які обертаються з постійними кутовими швидкостями Ω_1 і Ω_2:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r} = 0, \qquad (1)$$

де $\vartheta(r)$ – швидкість рідини, r – радіальна координата циліндричної системи координат,

при граничних умовах:

$$\vartheta(R_1) = R_1\Omega_1 \quad \text{та} \quad \vartheta(R_2) = R_2\Omega_2. \qquad (2)$$

Граничні умови (2) означають, що швидкість рідини на поверхні відповідного циліндра повинна дорівнювати швидкості самого циліндра.

Загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$\vartheta = Ar + B\cdot\frac{1}{r}, \qquad (3)$$

де A і B – довільні сталі, які визначаються з граничних умов (2).

Гранична задача (1–2) вперше досліджувалася в роботі М.П. Петрова [1], яка за часом публікації випереджувала інші роботи з цієї теми. Так, течію рідини між циліндрами, які обертаються, називають течією Куетта завдяки дослідам, які вчений проводив у 1890 р [2, С. 85].

Задача для ексцентрично розташованих циліндрів, які обертаються навколо своїх осей, вперше була розглянута М.Є. Жуковським в роботі [3] у 1887 р. Вперше вказана робота буда надрукована в «Повідомленнях математичного товариства при Харківському університеті», у подальшому ця робота була кілька разів перевидана.

У роботі [3] відзначається, що «…рух рідини з тертям між концентричними циліндричними поверхнями не може пояснити гідродинамічний напір, який необхідний для врівноваження сили тиску шипа на підшипник, … подібний напір можна очікувати при русі в'язкої рідини між двома ексцентричними поверхнями кругових циліндрів». Вперше на це явище М.Є. Жуковський вказує в 1886 р в роботі [4] і пропонує наближений розв'язок задачі. У 1887 р Жуковським М.Є. знайдено розв'язок задачі для випадку, коли циліндри обертаються в протилежних напрямках з рівними швидкостями [3].

У іншій роботі [5], яка написана Жуковським М.Є. у співавторстві з Чаплигіним С.О. в 1904 р., знайдено точний розв'язок досліджуваної задачі з використанням біполярних координат і у припущенні про малу величину зазору між шипом і підшипником. У вступі до роботи [5] автори аналізують роботи О. Рейнольдса та А. Зоммерфельда. Відзначається, що О. Рейнольдсом знайдено наближений розв'язок при значних спрощеннях: в рівняннях Нав'є-Стокса відкидаються всі інерційні доданки, нехтується кривиною поверхонь, в рівняннях руху відкидаються доданки, пов'язані з силами в'язкості. У результаті цих припущень розв'язання системи рівнянь Нав'є-Стокса зводиться до інтегрування одного рівняння для тиску в мастилі – рівняння О. Рейнольдса [6].

У роботі А. Зоммерфельда, яка вийшла в 1904 р, встановлена аналогія між задачею руху рідини між ексцентричними циліндрами та задачі про рівновагу пружної пластини, яка обмежена двома ексцентричними колами. Крім того, А. Зоммерфельдом отримані розв'язки для двох окремих випадків: великих та малих швидкостей обертання шипа. Вказані роботи О. Рейнольдса та А. Зоммерфельда увійшли до збірки [6].

Результати, які отримані Жуковським М.Є. та Чаплигіним С.О., обмежуються випадком, коли весь зазор між шипом і підшипником заповнений мастилом.

Подальша теорія змащування підшипників ковзання розвивається стосовно врахування нелінійних членів рівнянь Нав'є-Стокса, неповного заповнення мастилом зазору між шипом та підшипником, врахування скінченних розмірів підшипника тощо [7].

Література

1. Петров Н. П. Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости. *Инженерный журнал*. СПб, 1883. IV, 210 с. URL: http://books.e-heritage.ru/book/10074125
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 736 с.
3. Жуковский Н. Е. О движении вязкой жидкости, заключенной между двумя эксцентрическими цилиндрическими поверхностями. *Полное собрание сочинений.* Т. 4. *Волны. Вязкость. Реакция жидкости*. Москва-Ленинград: Главная редакция авиационной литературы, 1937. С. 250-278.
4. Жуковский Н. Е. О гидродинамической теории трения хорошо смазанных твердых тел. *Полное собрание сочинений.* Т. 4. *Волны. Вязкость. Реакция жидкости*. Москва-Ленинград: Главная редакция авиационной литературы, 1937. С. 234-241.
5. Жуковский Н. Е. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником. *Полное собрание сочинений.* Т. 4. *Волны. Вязкость. Реакция жидкости*. Москва-Ленинград: Главная редакция авиационной литературы, 1937. С. 279-319.
6. Чаплыгин С. А., Жуковский Н. Е., Мичель А., Зоммерфельд А., Рейнольдс О., Петров Н. П. Гидродинамическая теория смазки. Москва-Ленинград: Государственное технико-теоретическое изд-во, 1934. 566 с.
7. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения Монография. М.: Наука, 1990. 280 с.

М.І. Шайнога
Львівський національний університет імені Івана Франка
Науковий керівник ***В.М.Фірман*** *кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри безпеки життєдіяльності*

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЗА ЗГИНУ З РОЗТЯГОМ ПЛАСТИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ОТВОРОМ ТА ТРІЩИНАМИ, БЕРЕГИ ЯКИХ КОНТАКТУЮТЬ

У різних галузях техніки та промисловості широко використовують пластинчасті елементи конструкцій, оскільки вони є порівняно легкі та досить міцні. Ці елементи з технічної точки зору можуть містити кругові отвори, а у процесі експлуатації у них можуть виникати тріщиноподібні дефекти, які значно впливають на міцність та цілісність конструкції.

Утворення та поширення тріщин у різних елементах конструкцій може призводити до трансформування внутрішньої структури і поверхневих шарів матеріалів, зміни умов експлуатації та зносу пластинчастих елементів деталей машин, що негативно впливає на людину та навколишнє середовище. Через утворення та поширення тріщин збільшуються навантаження в елементах конструкцій, стиках і сполученнях, знижується несуча здатність деталей, виникає руйнування обладнання. Усе це призводить до зниження строку служби таких елементів та до зростання ймовірності аварійних ситуацій і збільшення економічних витрат. Вважається, що 63% аварій у машинах і механізмах має місце саме внаслідок наявності тріщиноподібних дефектів. Тому важливою задачею безпеки життєдіяльності та механіки є визначення максимального (критичного) навантаження, яке можу бути прикладене до пластинчастого елемента конструкції.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить циліндричний (круговий) отвір радіуса R та систему M довільно орієнтованих прямолінійних наскрізних тріщин завдовжки $2l_k$ $\left(k=\overline{1,M}\right)$. Вважатимемо, що пластина згинається на безмежності рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ та M_y^∞ і розтягується зусиллями P_1 та P_2. Область всередині кругового отвору позначимо через S^+, ззовні – через S^-, лінію, де розміщена k-та тріщина – через L_k, а коло – через L (див. рис. 1).

На отворі будемо мати наступні крайові умови

$$M_r=0,\ P_r=0,\ \sigma_{\Pi r}=0,\ \tau_{\Pi r\theta}=0,\ x\in L, \qquad (1)$$

де M_r – згинальний момент, $\sigma_{\Pi r}$ і $\sigma_{\Pi r\theta}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила.

Крайові умови гладкого контакту берегів тріщин за геометрично лінійного підходу мають вигляд

$$P^+=P^-=0,\ M_{y_k}^+=M_{y_k}^-=N_k h,\tau_{\Pi x_k y_k}^+=\tau_{\Pi x_k y_k}^-=0,\ x_k\in L_k,\ k=\overline{1,M}, \qquad (2)$$

$$\sigma_{\Pi y_k y_k}^+=\sigma_{\Pi y_k y_k}^-=-N_k/(2h),\ \frac{\partial\left[v_\Pi\right]}{\partial x_k}+h\cdot\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial y_k}\right]=0,\ x_k\in L_k,\ k=\overline{1,M}, \qquad (3)$$

де N_k – контактне зусилля між берегами k-тої тріщини; $\left[f\right]=f^+-f^-$, значками “+” і “–” позначені граничні значення функцій при прямування точки площини до k-тої тріщини при $y_k\to\pm 0$.

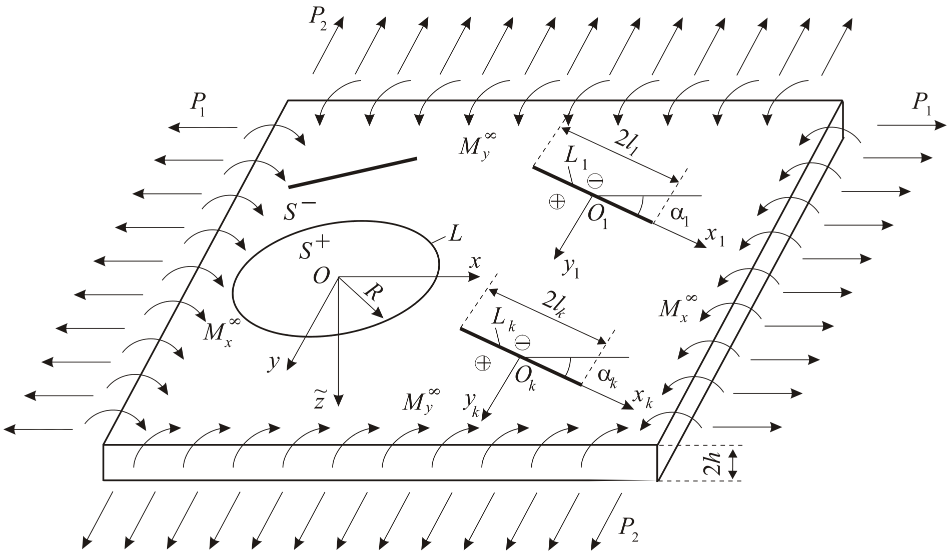


Рис. 1. Безмежна пластина з круговим отвором та системою довільно розташованих тріщин

Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [3-5], розв'язок сформульованої задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі яких отримано інтегральне рівняння на межі кругового отвору, а крайові умови на берегах тріщини вдалося задовольнити аналітично. Проведено числовий аналіз критичного навантаження, при яких елемент конструкції буде руйнуватися, при різних параметрах задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Література

1. Фірман І.В. Помилка людини серед причин виробничого травматизму / І.В. Фірман, С.В. Тимошук, В.М. Фірман // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2018. – Вип. 84, № 2. – С. 78-82
2. Яремко З.М. Ризик-орієнтований підхід до управління безпекою техногенного середовища / З.М. Яремко, С.В. Писаревська, В.М. Фірман // Управління розвитком складних систем. – 2017. – № 31. – С. 123-131.
3. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин / А.Е. Андрейкив // – Киев: Наукова думка, 1982. – 348 с.
4. Опанасович В. К., Слободян М. С. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують/ В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.
5. Опанасович В.К. Двовісний згин пластини з круговим отвором та двома співвісними крайовими радіальними тріщинами, береги яких контактують по області сталої ширини / В.К. Опанасович, М.С. Слободян, І.С. Звізло // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математична. Спецвипуск. - 2015. – С. 197-202.

Козак Святослав
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.Ф. Стасюк**, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

КРИПТОСИСТЕМА ЕЛЬ-ГАМАЛЯ

Криптосистема Ель-Гамаля є альтернативою до криптосистеми RSA і забезпечує таку ж криптостійкість. Безпека алгоритму Ель-Гамаля базується на складності обчислювання дискретних логарифмів. Тому слід виключити ті випадки, у яких логарифмування можна провести ефективно. Зокрема, просте число p слід вибирати так, щоб число $p-1$ мало великий простий дільник, інакше суперник може скористатись алгоритмом Сільвера-Поліга-Хелмана.

Генерування ключів. Вибирають велике просте число p і число g, $1<g<p-1$, яке має в мультиплікативній групі $\mathbb{Z}_p^*$ великий порядок. В ідеальному випадку $g-$первісний корінь за модулем p. Числа p і q не є таємницею і перебувають в загальному користуванні. Кожен абонент вибирає собі випадкове число a у проміжку від 1 до $p-1$ і обчислює $h=g^a \pmod p$.

Відкритий ключ: p,g,h; *Таємний ключ:* a.

Шифрування відбувається блоками. Кожен блок M вважаємо елементом з $\mathbb{Z}_p^*$. Повідомлення $M\in\mathbb{Z}_p^*$ перетворюють в криптотекст $C\in\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p^*$ таким чином:

- вибирають випадкове число r таке, що $1\le r\le p-1$;
- обчислюють $C=(c_1,c_2)$, де

$$c_1\equiv g^r \pmod p,\quad c_2\equiv Mh^r \pmod p.$$

Дешифрування. $D(C)=c_2\left(c_1^a\right)^{-1} \pmod p$.

Приклад 1. Нехай $p=43$, $g=3$, $a=6$. Обчислимо $h\equiv 3^6 \pmod{43}=41$.

Маємо *відкритий ключ:* 43, 3, 41.

Припустимо, що шифрується числова інформація і потрібно зашифрувати повідомлення $M=7$. Виберемо випадкове число r, наприклад, $r=10$. Тоді

$$c_1\equiv 3^{10} \pmod{43}=10,\quad c_2\equiv\left(7\cdot 41^{10}\right) \pmod{43}=30.$$

Отримуємо криптотекст $C=(10,30)$.

Дешифруємо криптотекст $C=(10,30)$, тобто перевіримо справедливість конгруенції

$$D(10,30)\equiv 30\cdot\left(10^6\right)^{-1} \pmod{43}=7.$$

Дійсно, легко перевірити, що $10^6 \equiv 35 \pmod{43}$. Використовуючи алгоритм Евкліда, можна переконатись, що оберненим елементом до елемента 35 за $\bmod 43$ є елемент 16. Далі перевіримо, що $30 \cdot 16 \pmod{43} = 7$, тобто прийдемо до вихідного шифрованого повідомлення.

Криптосистема Ель-Гамаля на еліптичній кривій

Обирають еліптичну криву $E_p(a,b)$ і точку G цієї кривої високого порядку, тобто таку, що $nG = O$, де ціле число n велике і просте. Параметри кривої та перелік відкритих ключів k_A, k_B передаються всім користувачам мережі.

Припустимо, що користувач A (Аліса) хоче передати повідомлення користувачеві B (Бобу). Вважатимемо, що повідомлення подано у формі числа $M < p$. Користувач A виконує такі дії:

- обирає випадкове число r, $1 < r < n$;
- обчислює $R = rG$, $P = rY_B = (x, y)$, де $Y_B = k_B G$;
- зашифровує $C \equiv (Mx) \bmod p$;
- надсилає користувачеві B шифртекст (R, C).

Користувач B після отримання шифртексту (R, C) виконує такі дії:

- обчислює $Q = k_B R = (x, y)$;
- розшифровує $M = (Cx^{-1}) \bmod p$.

Для обґрунтування цього алгоритму достатньо зазначити, що

$$k_B R = k_B(rG) = r(k_B G) = rY_B, \text{ тобто } Q = P.$$

Зауважимо, що криптосистема Ель-Гамаля на еліптичній кривій використовує скалярне множення точки замість піднесення до степеня за великим модулем у випадку простого скінченого поля.

Приклад 2. $p = 211$, $G = (2,2)$, $E_{211}(0,-4)$, $r = 2$, $k_B = 2$, $M = 2$. Можна підрахувати, що $241G = O$.

Аліса обчислює :

1. $R = 2(2,2) = (0,209)$;
2. $Y_B = k_B G = 2(2,2) = (0,209)$, $P = 2Y_B = (1,1)$;
3. $C = 2 \cdot 1 (\bmod 211) = 2$;
4. Аліса надсилає $\{(0,209), 2\}$.

Боб обчислює

1. $2 \cdot (0,209) = (1,1)$;
2. $M = 2 \cdot 1 (\bmod 211) = 2$.

Отже, Боб отримує вихідне повідомлення $M = 2$.

Література

1. Вербіцький О.В. Вступ до криптології / О.В.Вербіцький. – Львів.: ВНТЛ, 1998. – 246с.
2. М.В.Захарченко Асиметричні методи шифрування в телекомунікаціях. Навчальний посібник / М.В.Захарченко, О.В. Онацький, Л.Г.Йова, Т.М. Шинкарук. – Одеса: 2011. – 184 с.

А.С. Жарковський, І.С. Грицевич
Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного
*Науковий керівник **Р.А. Ковальчук**, к.т.н, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (озброєння та техніки інженерних військ)*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ СПЕЦІАЛЬНИХ МАШИН ЦИКЛОВОЇ ДІЇ

Ґрунтовні дослідження перехідних та усталених режимів роботи насосних агрегатів спеціальних машин можна здійснити лише на основі врахування взаємовпливу електромагнітних коливальних явищ у машинних агрегатах і коливальних явищ у виконавчому механізмі насоса. Необхідно приймати до уваги пружно-дисипативні та інерційні властивості ланок кривошипно-повзунних механізмів насоса, навантажувальні характеристики передавальних пристроїв, зокрема, фрикційної муфти, закономірності зміни тиску рідини на поршні насоса. У зв'язку з екстремальним характером навантаженості елементів насосних агрегатів намітилися тенденції до уточнення їх розрахункових моделей та більш загального комплексного підходу до аналізу динамічних процесів у насосних агрегатах.

Для досягнення цієї мети розв'язуються такі задачі:

– розробка математичної моделі і алгоритму розрахунку нестаціонарних процесів у насосному агрегаті з урахуванням взаємозв’язку електромагнітних явищ в асинхронному двигуні і механічних коливань у привідній системі, а також несталості зведеного моменту інерції кривошипно-повзунного механізму насоса та визначення впливу експлуатаційних параметрів на зусилля у пружних ланках привідного механізму насоса;

– розроблення технічних рішень і практичних рекомендацій, що спрямовані на зниження динамічних навантажень елементів привідних систем і удосконалення конструкцій з’єднувальних вузлів насосних агрегатів бурових установок.

Механічна система насосного агрегату, що складається з асинхронного двигуна, шинопневматичної муфти, пасової передачі, редуктора та поршневого насоса, схематично зображена на рис. 1.

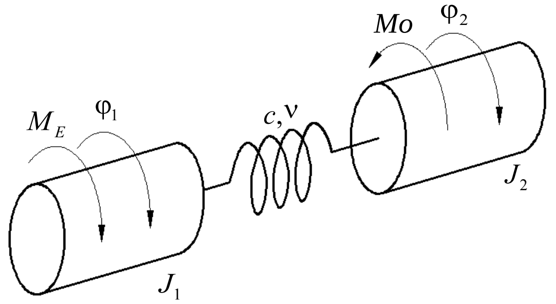


Рис.1. Розрахункова схема механічної системи насосної установки

На схемі прийняті такі позначення: J_1 – зведений до корінного вала насоса момент інерції ротора двигуна; J_2 – зведений до корінного вала момент інерції механізму насоса; c – зведена до корінного вала насоса жорсткість послідовно з'єднаних пружних ланок (шинопневматичної муфти і пасової передачі); ν – зведений коефіцієнт лінійного опору пружних ланок; $M_{Ез}$ – зведений електромагнітний момент двигуна; M_O – момент сил опору рухові, що діє на корінний вал насоса; φ_1, φ_2 – кутові координати.

Диференціальні рівняння руху елементів агрегату, складені за схемою рівняння Лагранжа другого роду, мають вигляд

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2;$$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + c(\varphi_1 - \varphi_2) + \nu(\omega_1 - \omega_2) = M_{Ез};$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial J_2}{\partial \varphi_2}\omega_2^{\,2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) - \nu(\omega_1 - \omega_2) = -M_O, \qquad (1)$$

де $M_{Ез}=M_E \cdot u$, M_E – електромагнітний момент на валі двигуна; u – передавальне відношення приводу. Початкові умови інтегрування рівнянь (1) прийнято нульовими. В результаті сумісного інтегрування диференціальних рівнянь руху механічної системи (1) і рівнянь, що описують електромагнітні явища в асинхронному двигуні, отримано часові залежності величин φ_1, φ_2, ω_1, ω_2, M_E, а також крутний момент в пружній ланці

$$M = c(\varphi_1 - \varphi_2) + \nu(\omega_1 - \omega_2). \qquad (2)$$

За різних значень тиску на викиді насоса УНБ-600 визначено момент в пружній ланці, електромагнітний момент, а також кутові швидкості ротора двигуна та корінного вала насоса як функції часу. Особливе значення має дослідження перехідних режимів роботи насоса, оскільки саме під час пуску і гальмування елементи та вузли привідної системи зазнають найбільших навантажень.

Розроблена математична модель може бути застосована в системах автоматизованого проектування насосних агрегатів для забезпечення належної точності розрахунків на міцність і прогнозування ресурсу елементів конструкцій, а також з метою підвищення ефективності експлуатації насосів шляхом раціонального добору їх продуктивностей і робочих швидкостей.

Література

1. Алюшин Ю. А. Динамические эффекты в кривошипно-ползунных механизмах / Ю.А. Алюшин, А.Э. Волков, Д.А. Рыкунов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 3. С. 15–19.

2. Бахшалиев В. И. Динамический анализ кривошипно-ползунного механизма и расчет на прочность «плавающего шатуна» / В.И. Бахшалиев // Изв. вузов. Маши-ностроение, 2000. № 3, С. 44–50.

3.Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. К.: Вища школа, 2004. – 525 с.

4. Павлище В. Т. Основи конструювання та розрахунок деталей машин. – К.: Вища школа, 1993. – 556 с.

5. Харченко Є. В., Ковальчук Р. А. Визначення зведених моментів інерції поршневих насосів бурових установок // Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні і приладобудуванні / Вісник Національного університету «Львівська політехніка» № 535. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. С. – 89–95.

М.В. Мірошніков, Т.І. Струсь
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Гузик Н.М.,*** *к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри інженерної механіки (озброєння та техніки інженерних військ)*

НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ЗАДАЧАХ НА ТОЧНІСТЬ СТРІЛЬБИ

Досвід останніх років показує важливість застосування броньованих машин під час ведення бойових дій, стабілізації обстановки міжнародних миротворчих, антитерористичних та спеціальних операцій. Постійне удосконалення та зростання потенціалу сучасних засобів ураження, підвищення глибини, швидкості, точності та вибірковості їх впливу загострює проблему ефективності бойового застосування таких машин.

Експлуатація цих машин у складних умовах руху пересічною місцевістю показує, що коливання корпусу призводить до погіршення всіх його експлуатаційно-технічних характеристик та впливає на ефективність ведення вогню. Зауважимо, що точність стрільби є надзвичайно актуальним питанням на сьогодні, оскільки розсіювання снарядів веде до збільшення витрат снарядів та до виконаннявогневого завдання загалом. Одним із визначальних чинників, що впливає на ефективність ведення вогню сходу, є коливання підресореної частини бойових машин.

У даній роботі досліджується впливнелінійно-пружних характеристик підвіски на амплітуду та частоту вертикальних коливань підресореної частини бойових машин та на точність ведення вогню із стаціонарно встановленої на них стрілецької зброї. Математичним апаратом, що при цьому застосовується, є диференціальне рівняння збуреного руху підресореної частини та такі елементи теорії ймовірностей, як неперервні випадкові величини, нормальний закон їх розподілу, ймовірність влучання неперервної випадкової величини в заданий інтервал.

Розсіювання снарядів підлягає нормальному закону розподілу ймовірностей. Він виражає залежність між величиною відхилення снаряда від центра розсіювання і ймовірністю цього відхилення. Коротко закон розсіювання снарядів формулюють так: розсіювання снарядів нерівномірне, симетричне, небезмежне.За міру розсіювання в задачах на точність стрільби беруть серединне відхиленням E – половину довжини інтервалу, симетричного відносно центру розсіювання снарядів, в який задана неперервна величина X попадає з ймовірністю 0,5, тобто $P\{|X-m|<E\}=0{,}5$. Ймовірність влучання нормально розподіленої величини X в інтервал (α,β) обчислюють за формулою $P(\alpha<X<\beta)=\overline{\Phi}\left(\frac{\beta-m}{E}\right)-\overline{\Phi}\left(\frac{\alpha-m}{E}\right)$, де $\overline{\Phi}(x)=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\rho^2t^2}dt$ – зведена функція Лапласа.Проведені у роботі дослідження щодо точності стрільби базуються на застосуванні шкали розсіювання снарядів та відомих значень зведеної функції Лапласа.

І.В. Кропивницький
Львівський національний університет імені І.Франка
*Науковий керівник **А.О. Саницька** ст. викладач кафедри природничо-математичних наук*

ВПЛИВ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПРУЖНО ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ

Розвиток і прогрес багатьох галузей промисловості безпосередньо пов’язані зі створенням нових матеріалів, що поєднують в собі високі техніко-експлуатаційні властивості із доступною технологічністю виготовлення і низькою собівартістю виробництва. Композиційні матеріали і технології їх отримання є одним з найбільш наукоємних і багатообіцяючих напрямів матеріалознавства з перспективою ефективного застосування в інженерній практиці.

Зварювання вибухом, внаслідок притаманних йому особливостей є одним з найбільш ефективних, а в деяких випадках і єдино можливим шляхом створення високоякісних біметалевих і багатошарових композиційних матеріалів. Зварювання вибухом за своєю фізичною природою дуже складний процес, що стосується багатьох фундаментальних розділів матеріалознавства, механіки, газової динаміки та ін.

Формулювання задачі

Під терміном «зварювання вибухом» розуміють явище міцного з'єднання поверхонь металевих тіл, що вдаряються під деяким кутом і при цьому принаймні одне з них розганяється до швидкості 1800 ... 3000 м/с [3] продуктами детонації вибухової речовини. При цьому слід зазначити, що власне вибух, а точніше енергія розширення продуктів детонації в даному процесі відіграє лише допоміжну роль, забезпечуючи прискорене переміщення тіл одне відносно та зіткнення. Фізична природа джерел такого прискорення тіл може бути самою різноманітною: електромагнітне поле (при магнітно-імпульсному зварюванні), енергія порохового заряду в гарматному стволі, енергія вибуху електричного провідника при пропущенні через нього струму та ін.. Але у всіх випадках суть процесів, що відбуваються при високошвидкісному зіткненні у твердих тілах залишається незмінною [4].

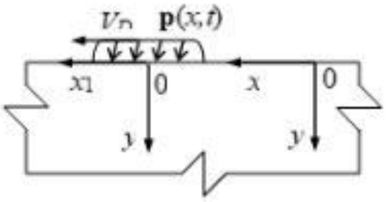


Рис.1 Схема задачі

Всі методи зварювання вимагають дотримання певного комплексу правил охорони праці. На зварювальника під час зварювання плавленням в тій чи іншій мірі існує можливість небезпечних впливів в зв’язку з наступними факторами:

- ураження електричним струмом при дотику до струмоведучих частин електричного кола;
- ураження променями електричної дуги очей і відкритої поверхні шкіри;
- опіки від крапель металу і шлаку при зварюванні;
- отруєння шкідливими газами, що виділяються при зварюванні і при забрудненні приміщень пилом і випарами різних речовин;
- вибухи через неправильне поводження з балонами стисненого газу або через виробництво зварювання в ємностях з-під горючих речовин, або виконання зварювання поблизу легкозаймистих і вибухонебезпечних речовин;
- пожежі від розплавленого металу і шлаку в процесі зварювання;
- травми різного роду механічного характеру при підготовці важких виробів до зварювання і в процесі зварювання.

З метою зменшення небезпеки ураження електричним струмом зварювальнику слід дотримуватися наступних заходів:

- надійна ізоляція всіх, проводів, пов’язаних з живленням джерела струму і зварювальної дуги;

- надійний пристрій електродотримача з гарною ізоляцією, яка гарантує, що не буде випадкового контакту струмоведучих частин електродотримача зі зварним виробом або руками зварника;
- робота у справно-сухому спецодязі і рукавицях. При роботі в тісних відсіках і замкнутих просторах обов’язкове використання гумових калош і килимків, джерел освітлення з напругою не більше 6-12 В;

Таким чином в даній роботі з використанням динамічної задачі теорії пружності змодельовано характерне для технологічного процесу зварки вибухом явище хвилеутворення на поверхні нижньої заготовки. Вищезазначені правила охорони праці допомагають уникнути уражень під час зварювального процесу. Створення безпечних умов праці найважливіша задача будь-якого виробництва.

Література

1. Яремко З.М. Соціально-економічне підґрунтя формування мотивації щодо посилення відповідальності за дотримання вимог охорони праці / З.М. Яремко, С.В. Писаревська, В.М. Фірман // Технополіс. – 2014. – №10. – С. 36–37.
2. Фірман І.В. Помилка людини серед причин виробничого травматизму / І.В. Фірман, С.В. Тимошук, В.М. Фірман // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2018. – Вип. 84, № 2. – С. 103-108.
3. Hutsaylyuk, V., Sulym, H., Pasternak, Ia., Turchyn, I. Transient Plane Waves Propagation in Non-homogeneous Elastic Plate // Composite Materials: The Great Advance. Proc. of the 19th Int. Conf. Composite Materials, ICCM19 (Montreal, Canada, 28 July – 2 August 2013). P. 8890‑ 8897.
4. Sulym, H., Hutsaylyuk, V., Pasternak, Ia., Turchyn, I. Stress-strain state of an elastic rectangular plate under dynamic load // Mechanika. ‑ 2013. ‑ 19. No 6: ‑ P. 620–626.

Ф.Ф. Цивільська
Херсонський національний технічний університет
Науковий керівник ***С.В. Моісеєнко****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ АЕРОДИНАМІКИ ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК (ВЕУ)

Економіка України істотно залежить від зовнішніх поставок енергоносіїв. До одного з перспективних напрямків вирішення енергетичної безпеки України відноситься вітроенергетика, як найдешевше джерело електроенергії, вироблюваної в промислових масштабах.

В даний час основу вітроенергетики складають горизонтально-осьові установки (ГО ВЕУ). На їх частку припадає близько 85% вироблюваної електроенергії. Але враховуючи помірний енергетичний вітровий потенціал України, альтернативою, на наш погляд, є вертикально-осьові ВЕУ. До переваг ВО ВЕУ можна віднести: низький поріг робочої швидкості вітру, відсутність механізму орієнтації на вітер, менший рівень експлуатаційних витрат, простота форми лопаті, знижений рівень шуму. Є необхідність в підвищенні рівня розуміння аеродинамічних процесів ВО ВЕУ через їхню малу вивченість.

Ефективність роботи будь-якої ВЕУ визначається коефіцієнтом використання енергії вітру (коефіцієнтом потужності). Очевидно, аеродинаміка грає основну роль в роботі ВЕУ. Підвищення потужності ВЕУ і збільшення коефіцієнта використання енергії вітру призвели до необхідності врахування взаємного впливу лопатей одна на одну, поля швидкостей навколо самого ротора. Таким чином, виникла потреба у вивченні процесів формування і розпаду вихрів, а також їх впливу на аеродинамічні характеристики ВЕУ.

Головними труднощами в розрахунку нестаціонарних процесів при обтіканні роторів ВО ВЕУ є ефекти динамічного зриву потоку. До теперішнього часу жодна з відомих спрощених методик не давала можливості адекватно розрахувати аеродинамічні характеристики роторів в цьому випадку. Розрахунки нестаціонарних, тривимірних, турбулентних процесів, передбачають побудову досить складних математичних моделей. Такі моделі є, з математичної точки зору, складними системами нелінійних диференціальних рівнянь, для розв’язання яких потрібне використання потужних обчислювальних комплексів. Для створення таких моделей використовується практично весь апарат вищої математики: аналітична і диференціальна геометрія, математичний аналіз, тензорне числення, теорія рівнянь математичної фізики. Розв’язання таких систем створює якісно новий рівень проектування – проведення обчислювальних експериментів, які повністю відтворюють умови натурних експериментів. Такий підхід є основою порівняно молодої науки – обчислювальної гідродинаміки (Computational Fluid Dynamics – CFD).

Основою обчислювальної гідродинаміки вважається система рівнянь Нав'є-Стокса. Рівняння Нав’є-Стокса, що використовують закони збереження маси, імпульсу, енергії в поєднанні з основними термодинамічними і реологічними законами, містять мінімальну кількість вихідних припущень, що робить їх найбільш повною і обґрунтованою системою рівнянь механіки рідини і газу. Саме рівняння Нав’є-Стокса (на відміну від рівнянь потенціалу і Ейлера) дозволяють відтворювати реальні фізичні процеси з необхідною точністю. У той же час з математичної точки зору вони становлять найскладнішу систему рівнянь математичної фізики, що застосовуються до вивчення реальних об'єктів. Для порівняння, рівняння Максвелла і Шредінгера, що становлять основу класичної електродинаміки і квантової механіки, є більш простими, і допускають аналітичні (точні) розв'язки. Для рівнянь Нав'є-Стокса ситуація обернена, їх розв'язання можливе тільки на основі чисельного експерименту, тому що більшість течій, які зустрічаються на практиці, є нестаціонарними, тривимірними і турбулентними. Характерною особливістю зазначеної системи рівнянь є її нелінійність при наявності диференціальних доданків другого порядку з малим параметром. Хоча існуючий рівень обчислювальної техніки дозволяє використовувати повну постановку початково-крайової тривимірної задачі, реалізація в індустріальних додатках такого підходу залишається занадто трудомісткою.

Побудована авторами математична модель на основі нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса реалізується в два етапи: 1) розрахунок полів швидкості і тиску; 2) обчислення інтегральних характеристик роторів: коефіцієнта крутильного моменту й коефіцієнта потужності. Результати обчислень та їх аналіз представлені в роботі [2]. Дана модель більш реалістично описує та відтворює реконструкцію течії і, як наслідок, фізично обґрунтований розподіл інтегральних характеристик, аніж існуючі інженерні та емпіричні методики проектування.

В даний час моделювання обтікання роторів ВЕУ, з урахуванням всіх супровідних процесів, доступне лише великим дослідницьким організаціям, які використовують суперкомп'ютери або кластери персональних комп'ютерів і мають достатній рівень фінансування. Відсутність в Україні високопродуктивних комп'ютерних систем призводить до неминучого розриву між українськими і зарубіжними вченими в області обчислювальних технологій, в реальних можливостях моделювання задач промислового рівня.

Література

1. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Полевой О. Б., Чашина И. Б., Моисеенко С.В. Вычислительная гидродинамика на службе ветроэнергетики. *Вісник Дніпропетровського ун-ту. Серія: Механіка*. 2016. Т.24, № 5, Вип. 20. С. 38–48.
2. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С.В. Численное моделирование процессов аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2017. Вип. 26. С. 153–167.

Р.Я. Левак
Львівський національний університет імені Івана Франка
Науковий керівник ***В.М. Фірман*** *кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри безпеки життєдіяльності*

ВИЯВЛЕННЯ ТРІЩИНОПОДІБНИХ ДЕФЕКТІВ І ОТВОРІВ ТА ЇХ НЕГАТИВНИЙ ВИЛПВ НА МІЦНІСТЬ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНИ

З метою забезпечення надійної роботи різних елементів конструкцій, які містять пластини і в яких можуть виникати тріщини, здійснюються профілактичні заходи задля запобігання росту тріщин, які можуть спричинити:

– механічні пошкодженнями випадкового характеру, які можуть негативно впливати на працездатність людини на різні виробничі процеси;

– проникнення у тріщини різних негативних середовищ (пил, волога, пари кислот, лугів і т.ін.).

Пластини широко застосовуються у машинобудуванні та багатьох галузях техніки і промисловості, вони є порівняно легкі і достатньо надійні. В процесі експлуатації елементи конструкції часто працюють в умовах нерівномірного навантаження, що призводить до дефектів типу тріщин, які можуть призвести до руйнування конструкції, тому важливим є визначення напружено-деформованого стану конструкції.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та тріщину, яка розташована, як показано на рис. 1, завдовжки $2l$ і які вільні від зовнішнього навантаження. Вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження на нескінченності береги тріщини приходять у гладкий контакт по лінії на верхній основі пластини. В площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox. Вважатимемо, що тріщина знаходиться на відстані x_0 від точки O, так що $x_0 > R + l\cos\alpha$, де α –кут між віссю Ox та тріщиною. Пов'яжемо з тріщиною декартову систему координат $O_1x_1y_1$. Точки площини Oxy, що співпадають з кінцями тріщини позначимо через a і b, область в середині кругового отвору – через S^+, ззовні – через S^-, лінію, де розміщена тріщина – через L_1, а коло –

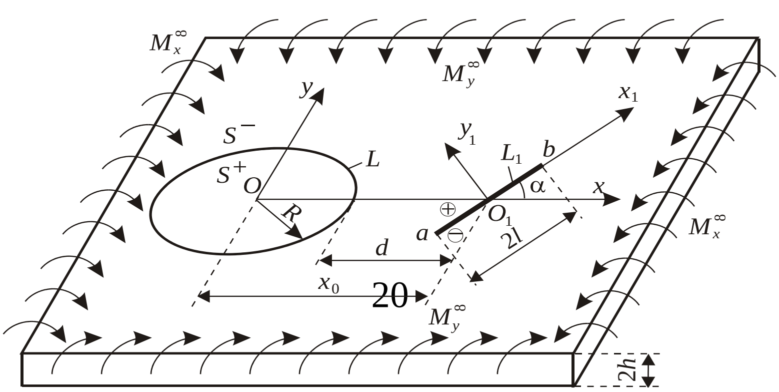


Рис. 1.

через L. Вважатимемо, що пластина згинається на нескінченності рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ (див. рис. 1).

Розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини; при таких крайових умовах:

$$\sigma_{y_1y_1}^{\pm} = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1y_1}^{\pm} = 0, \quad P^{\pm} = 0, \quad M_{y_1}^{\pm} = hN,$$

$$\partial[v_\Pi]/\partial x_1 + h \cdot \left[\partial^2 w/(\partial x_1 \partial y_1)\right] = 0, \; x_1 \in L_1,$$

$$M_r = 0, \; \sigma_r = 0, \; \sigma_{r\theta} = 0, \; P_r = 0, \; x \in L,$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{x_1y_1}$, $\sigma_{y_1y_1}$, σ_r і $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень, а u_Π і v_Π – компоненти вектора переміщень в плоскій задачі, M_r і M_{y_1} – згинальні моменти, w – прогин пластини в задачі згину пластини, P і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні силі, $[f] = f^+ - f^-$; значками "+" і "–" позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y_1 \to \pm 0$.

Використавши комплексні потенціали плоскої задачі та класичної теорії згину пластин, отримаємо задачі лінійного спряження, розв'язавши які отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь на берегах тріщини. Ця система розв'язана числового з використанням методу механічних квадратур. Крайові умови на межі кругового отвору задоволені аналітично.

Досліджено контактне зусилля між берегами тріщини, коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів, а також критичне навантаження, яке може витримати пластина.

Розв'язок цієї задачі дозволить виявляти дефекти в пластинчастих елементах, оцінювати їхню небезпеку, та навантаження яке може витримувати пластина. Це може попереджати несподіване руйнування механічної техніки, а отже і уникнути аварій на виробництві, робочих травм, та економічних збитків.

Література

1. Фірман І.В. Помилка людини серед причин виробничого травматизму / І.В. Фірман, С.В. Тимошук, В.М. Фірман // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2018. – Вип. 84, № 2. – С. 103-108.
2. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин / А. Е. Андрейкив // Киев: Наукова думка, 1982. – 348с.

Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. / Мусхелишвили Н.И.// М.: Наука, 1966. – 708с.

Опанасович В. К. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів. Вісник Донецького ун-ту / В.К. Опанасович, М.С. Слободян. // Сер. А: Природничі науки. – Вип. 1, 2005. – с. 85-89.

М. Горгут

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

РЕКУРЕНТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГРУПОВОЇ ЕКСПЕРТНОЇ ОЦІНКИ З ВРАХУВАННЯМ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ ОЦІНКИ

У галузі забезпечення безпеки життєдіяльності важливими є проблемні задачі експертної оцінки об’єктів, які будуються на індивідуальних неоднозначних суб’єктивних оцінках. Розглянемо рішення задачі побудови узагальнених оцінок об’єктів шляхом обробки індивідуальних експертних оцінок об’єктів. У відповідності з гіпотезою про те, що експерти є достатньо точними “вимірюваннями” групова оцінка будується на основі використання методів усереднення. Це відповідає тому, що індивідуальні оцінки експертів створюють компактну групу і у якості найбільш узгодженої оцінки використовується математичне сподівання (середнє значення) або медіана (найбільш вирогідна оцінка).

Приймемо, що d експертів провели оцінку m об’єктів по l показникам. Результати оцінювання подані у вигляді величин x_{is}^{h}, де s – номер експерта, i – номер об’єкта, h - номер показника (ознаки) порівнювання. Якщо оцінювання об’єктів проведено методом ранжування, то величини x_{is}^{h} є рангами. Якщо оцінювання об’єктів виконано методом безпосереднього оцінювання або методом послідовного порівняння, то величини x_{is}^{h} є числами або балами. Звісно, що обробка результатів оцінювання залежить від розглянутих методів вимірювання. Розглянемо спочатку випадок, коли величини x_{is}^{h} $(s=\overline{1,d}; i=\overline{1,m}; h=\overline{1,l})$ отримані методами безпосереднього оцінювання або послідовного порівнювання і, отже, є числами або балами.

Для отримання групової оцінки об’єктів в цьому випадку можна скористатися середнім значенням очінки для кожного об’єкту

$$x_i = \sum_{h=1}^{l}\sum_{s=1}^{d} q_h k_s x_{is}^{h} \ \ (i=\overline{1,m}) \qquad (1)$$

де q_h – коефіцієнти вагів показників порівнювання об’єктів; k_s – коефіцієнти компетентності експертів. Коефіцієнти вагових показників і компетентності експертів є нормованими величинами:

$$\sum_{h=1}^{l} q_h = 1; \qquad \sum_{s=1}^{d} k_s = 1 \qquad (2)$$

Коефіцієнти вагових показників можуть бути визначені експертним шляхом. Якщо q_{hs} – коефіцієнт ваги h – го показника, який надається s – м експертом, то середній коефіцієнт ваги h – го показника по усім експертам дорівнює

$$q_h = \sum_{s=1}^{d} q_{hs} k_s \ \ (h=\overline{1,l}) \qquad (3)$$

Коефіцієнти компетентності експертів можна вирахувати по апостеріорним даним, т.т. по результатам оцінювання об’єктів. Основною ідеєю цього обчислення є припущення про те, що компетентність експертів повинна оцінюватися по степені узгодженості їх оцінок з груповою оцінкою об’єктів. Алгоритм вирахування коефіцієнтів компетентності експертів має вид рекурентної процедури:

$$x_i^{(t)} = \sum_{s=1}^{d} x_{is} k_s^{(t-1)} \quad (i = \overline{1,m}) \tag{4}$$

$$\lambda^{(t)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{d} x_{is} x_i^{(t)} \quad (t = 1,2,\ldots) \tag{5}$$

$$k_s^{(t)} = \frac{1}{\lambda^{(t)}} \sum_{i=1}^{m} x_{is} x_i^{(t)} \quad (s = \overline{1,d}) \tag{6}$$

Обчислення починається з t=1. В формулі (4) початкові значення коефіцієнтів компетентності приймаються однаковими і рівними

$$k_s^{(0)} = \frac{1}{d}$$

Тоді по цій формулі групові оцінки об’єктів першого наближення, коли t=1, дорівнюють середнім арифметичним значенням оцінок експертів

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{d} x_{is} \quad (i = \overline{1,m}) \tag{7}$$

Далі вираховується величина $\lambda^{(t)}$ по формулі (8)

$$\lambda^{(t)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{d} x_{is} x_i^{(t)} \tag{8}$$

і значення коефіцієнтів компетентності першого наближення по формулі (6)

$$k_s^{(t)} = \frac{1}{\lambda^{(t)}} \sum_{i=1}^{m} x_{is} x_i^{(1)} \quad (s = \overline{1,d}) \tag{9}$$

Використовуючи коефіцієнти компетентності першого наближення, можна повторити увесь процес вираховування по формулам і отримати послідовно наступні наближення.

Можна розглянути також випадок, коли експерти проводять вимірювання об’єктів в порядковій щкалі методом ранжування так, що величини x_{is}^{h} (де s – номер експерта, i – номер об’єкта, h - номер показника порівнювання об’єктів) є ранги. Задачею обробки є побудова узагальненого ранжування по індивідуальним ранжуванням експертів. Для простоти зручний є випадок однієї ознаки порівняння.

Х.А. Тертека
Львівський національний університет імені Івана Франка
Науковий керівник ***Л.Ю. Фірман****, старший викладач кафедри природничо-математичних наук*

ВИКОРИСТАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ КЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ТРІЩИНАМИ

Дослідження напружено-деформованого стану з'єднувальних елементів конструкцій під дією нерівномірного навантаження є необхідним етапом розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій часто мають криволінійну межу і займають незв'язну область, то застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач дуже обмежене. При використанні механічних конструкцій необхідно враховувати умови їх експлуатації , щоб при дії на них різних чинників не утворювались тріщини і не відбулось руйнування конструкції.

Наявність тріщин впливає на цілісність та міцність елементів конструкцій і може призводити до їх руйнування. А це створює ризики для життя людини та може негативно впливати на навколишнє середовище, а також призводити до високих економічних втрат та нещасних випадків, травмувань.

Розглянемо мішану квазістатичну крайову задачу теорії пружності в переміщеннях в області V з криволінійною межею Σ, яка моделює напружено-деформований стан у пластині з квадратним абсолютно жорстким включенням та розрізом (рис.2). Вона полягає в розв'язуванні двох рівнянь рівноваги

$$\mathrm{Div}\left(\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}(\vec{u}) \right) + \vec{X} = 0 \qquad (1)$$

з мішаними крайовими умовами на її поверхні Σ $(\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$\vec{u}\,\Big|_{\Sigma_u} = \vec{u}^{\,0}, \qquad \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot \vec{n}\,\Big|_{\Sigma_\sigma} = \vec{S}^{\,0}. \qquad (2)$$

Рівняння (1.1), (1.2) можуть також описувати квазістатичну рівновагу пружнопластичного тіла за деформаційною теорією пластичності, зокрема теорією малих пружно-пластичних деформацій О.А. Ільюшина (ТМППД) за навантаження (активний процес). Зв'язок напружень і деформацій для активного процесу у цій теорії має вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}, \quad s_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij}, \qquad (3)$$

де $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$; $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ – інтенсивність тензора деформацій. Щоб отримати рівняння рівноваги для початково ізотропного тіла з визначальними співвідношеннями (3), в (1) і (2) достатньо покласти

$$C_{ijkl} = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$
$$\lambda(\varepsilon_u) = K - (2/3)\mu(\varepsilon_u), \quad \mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)). \tag{4}$$

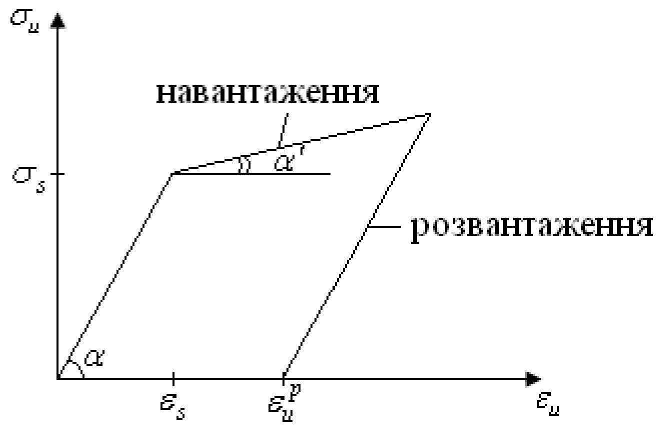


Рис. 1. Графік залежності $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ для матеріалу з лінійним зміцненням

Для матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), зокрема міді, алюмінію та їхніх сплавів, функція $\omega(\varepsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} (1-\gamma)(\varepsilon_u - \varepsilon_s)/\varepsilon_u, & \varepsilon_u > \varepsilon_s; \\ 0, & \varepsilon_u \le \varepsilon_s, \end{cases} \tag{5}$$

де $\gamma \equiv \mu'/\mu$ – параметр зміцнення ; $2\mu \equiv \mathrm{tg}\,\alpha$; $2\mu' \equiv \mathrm{tg}\,\alpha'$.

Для процесу розвантаження визначальні співвідношення мають вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}, \; s_{ij} = s'_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e'_{ij}), \tag{6}$$

де компоненти тензорів e'_{ij} і s'_{ij} відповідають початку процесу розвантаження.

За допомогою числового варіаційно-різницевого методу розв'язано плоскі задачі деформаційної теорії пластичності в пластинах з квадратним отвором (жорстким включенням) та розрізом. Також проведено числовий аналіз задачі та побудовано графічні залежності напружень та деформацій , на основі яких можна визначити чи відбудеться руйнування елемента конструкції чи не відбудеться.

Отже, застосування теорії пластичності для елементів конструкції з тріщинами дозволять виявляти та попереджувати руйнування і як наслідок убезпечить обслуговуючий персонал від травматизму та нещасних випадків.

Література

3. Фірман І.В. Помилка людини серед причин виробничого травматизму / І.В.Фірман, С.В.Тимошук, В.М.Фірман // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2018. – Вип. 84, № 2. – С. 103-108.

4. Яремко З.М. Від ризик-орієнтованого підходу до забезпечення безпеки до ризик-орієнтованого мислення / З.М. Яремко, С.В. Тимошук, В.М. Фірман // Пожежна та техногенна безпека. – 2017. – № 6. – С. 14-15.
5. Божидарник В. В. Елементи теорії пластичності та міцності / В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим. – Львів: Світ, Т. 1. – 1999. – 532 с., Т. 2. – 1999. – 419 с.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.

О.С. Андрусенко, Д.М. Гончар, А.С. Чонка
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник ***Н.М. Гузик,*** *к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри інженерної механіки (озброєння та техніки інженерних військ)*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ПРО РУХ ПАРАШУТИСТА

У роботі змодельовано ситуацію польоту та посадки особи або упаковки вантажу. Дослідження базуються на побудові розв’язків диференціальних рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Парашутист, маса якого становить 103 кг, зістрибує зі швидкістю 0,555 м/с (в напрямку осі абсцис) з борту літака, який в свою чергу рухається зі швидкістю 115 м/с (в напрямку осі ординат). Літак летить на висоті 4000 м (у напрямку осі аплікат). Коли парашутист залишає літак, він перебуває на висоті, де опір повітря вважається незначним. Він падає у вільному падінні протягом 11,5 с, далі – тягне за кільце. Після цього моменту, його падіння стає задачею на рух у тривимірному просторі з непостійним пришвидшенням вздовж кожної осі, оскільки тепер потрібно враховувати опір повітря.

Виберемо систему координат таким чином: вісь абсцис Ox направимо в напрямку стрибка парашутиста, вісь ординат Oy – в напрямку руху літака, коли парашутист вистрибує, вісь аплікат Oz є вертикальною, а початок координат (точка O) знаходиться на землі безпосередньо під літаком в момент стрибка.

Припускатимемо, що, коли парашутист витягує кільце, парашут розгортається негайно і виникає сила тертя (лобовий опір і опір повітря) величиною $D = dv^2$, де d – коефіцієнт тертя, v – швидкість парашутиста. Вважатимемо, що $d = 20$, хоча зазвичай значення d важко визначити, оскільки він залежить від багатьох змінних.

Крім того, припускаємо, що сила опору повітря прикладається тільки уздовж вертикального напрямку і її вплив може бути змодельований як сила величиною $F = -bv,$ де знак мінус вказує на те, що сила напрямлена проти напрямку руху. Значення коефіцієнта опору b приймемо рівним 10.

Одночасно з розкриттям парашута, парашутист відчуває силу вітру в додатному напрямку осі абсцис зі швидкістю 1,2 м/с. Вона може бути змодельована, як сила величиною $G = b(w - v),$ де b – вибраний коефіцієнт опору, v – швидкість парашутиста, а w – швидкість вітру.

Змоделюємо перші кілька секунд після розгортання парашута. По-перше, ми припустили, що розгортання парашута відбувається миттєво. Парашутист падає дуже швидко під час фінальної стадії вільного падіння і значно уповільнює рух до постійної (або граничної) швидкості протягом певного проміжку часу. Експериментально встановлено, що, ця перехідна фаза триває 3 секунди, і під час цієї фази парашутист падає на 53 метри вниз.

Мета роботи – визначити загальний час руху, координати та швидкість парашутиста в момент приземлення.

Я. Коваленко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРИ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ

Основою застосування запропонованих аналітичних методів є побудова математичної моделі, яка зв'язувала б у явному вигляді критерій ефективності технологічної системи зі змінними, що описують її структуру. Для технологічних машин послідовної дії така модель повинна зв'язати ступінь концентрації операцій, тобто розподіл технологічного процесу між окремими робочими позиціями, з ефективністю технологічної системи. Очевидно, що ця ефективність визначатиметься характеристиками процесу формування якості виробу та процесу транспортування заготовок виробу між робочими позиціями. Як показник ефективності технологічної системи найчастіше використовують її продуктивність, собівартість одиниці продукції або собівартість одиниці продуктивності. Для виготовлення всіх елементів конструкції виробу, які забезпечать параметри його якості, необхідно реалізувати m елементарних технологічних переходів, сумарна тривалість яких

$$t_O = \sum_{i=1}^{m} t_i ,$$

де t_i - тривалість реалізації i-го технологічного переходу. Ці технологічні переходи можуть бути реалізовані на одній робочій позиції, на двох, трьох та в загальному випадку на n робочих позиціях. Складність технологічної підсистеми визначається кількістю окремих робочих модулів або агрегатів, яка залежить, здебільшого, тільки від складності виробу. При зростанні кількості робочих позицій загальна кількість переходів і, отже, кількість окремих робочих модулів чи агрегатів не зростає, а збільшується лише кількість переходів, що реалізуються паралельно. Проте при цьому зростає складність транспортної підсистеми, яка включає більшу кількість транспортних модулів для міжпозиційного транспортування, а це знижує надійність технологічного комплексу. Якщо прийняти, що технологічний процес розподілений із забезпеченням вимог синхронізації операцій поміж n робочих позицій рівномірно, а час транспортування заготовки між робочими позиціями становить t_T, то тривалість робочого циклу T визначиться як

$$T = \frac{t_O}{n} + t_T . \qquad (1)$$

Технологічна система складається із технологічної підсистеми, що включає m робочих модулів, розміщених на n робочих позиціях, і транспортної підсистеми, що має n транспортних модулів. Нехай відмови кожного робочого або транспортного модуля стійкі, тобто призводять до зупинки технологічної системи для відновлення працездатності. Циклова продуктивність технологічної системи:

$$Q = \frac{1}{T} K_Г = \frac{1}{\frac{t_O}{n} + t_T} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\eta_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\mu_j}}, \qquad (2)$$

де $К_г$ - коефіцієнт готовності технологічної системи; α_i, β_j - інтенсивність відмов технологічної підсистеми при реалізації i-го технологічного переходу та транспортної підсистеми при реалізації i-го міжпозиційного переміщення відповідно; η_i, μ_i, - інтенсивності відновлень технологічної і транспортної підсистем відповідно; m - кількість технологічних переходів. Для опису залежності циклової продуктивності технологічної системи від змінних, що описують її структуру (кількості робочих позицій n), приймемо такі допущення.

1. Інтенсивність відновлення технологічної підсистеми не залежить від того, при реалізації якого технологічного переходу сталася технологічна відмова, тобто $\eta_1=\eta_2=...=\eta$.

2. Інтенсивність відновлення транспортної підсистеми не залежить від того, при реалізації якого міжпозиційного переміщення сталася транспортна відмова, тобто $\mu_1=\mu_2=...=\mu$.

3. Інтенсивність відмов технологічної підсистеми є функцією її складності, яка визначається складністю виробу, тобто кількістю m робочих модулів чи агрегатів, що реалізують технологічні переходи, і не залежить від варіанта їх розподілу поміж робочими позиціями, тобто не залежить від кількості n робочих позицій, на яких ці технологічні переходи розподілені.

4. Інтенсивність відмови транспортної підсистеми пропорційна до кількості транспортних модулів або агрегатів, тобто до кількості робочих позицій технологічної системи, а інтенсивність відмови окремих транспортних модулів або агрегатів усереднимо для всіх міжпозиційних переміщень, тобто $\beta_1=\beta_2=...=\beta$. Тоді вираз для продуктивності запишеться як

$$Q=\frac{1}{\frac{t_O}{n}+t_T}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+n\frac{\beta}{\mu}}=\frac{1}{\frac{t_O}{n}+t_T}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{K_Г(\alpha)}-1\right)+n\left(\frac{1}{k_Г(\beta)}-1\right)}, \quad (3)$$

де $K(\alpha)=K_{р.м.}$ - коефіцієнт готовності технологічної підсистеми; $k_Г(\beta)=k_{т.м}$ - коефіцієнт готовності одного транспортного модуля. Зробивши необхідні перетворення виразу для продуктивності, знайдемо його екстремум З умови екстремуму отримаємо залежність для визначення оптимальної кількості робочих позицій технологічної системи, аналіз отриманого виразу (через громіздкість тут не приведений) показує, що величина оптимальної кількості робочих позицій технологічної системи найбільш чутлива до характеристик надійності транспортної підсистеми і швидко зменшується при погіршенні коефіцієнта готовності транспортних модулів або агрегатів. Зауважимо, що запропонований підхід можна застосувати і для оцінки ефективності роботи систем у інших галузях, наприклад для оцінки оптимальної кількості підрозділів для ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій, використовуючи ті ж математичні критерії, наприклад коефіцієнт готовності транспортних модулів або агрегатів та ін. класичним аналітичним шляхом. Зробивши необхідні перетворення виразу для продуктивності, знайдемо його екстремум:

$$\left(\frac{1}{\frac{t_O}{n}+T}\right)'\frac{1}{1+\left(\frac{1}{K_{P.M}}-1\right)+n\left(\frac{1}{k_{T.M}}-1\right)}+\frac{1}{\frac{t_O}{n}+T}\left(\frac{1-\frac{1}{k_{T.M}}}{\left(1+\left(\frac{1}{K_{P.M}}-1\right)+n\left(\frac{1}{k_{T.M}}-1\right)\right)^2}\right)'=0;$$

$$\frac{\frac{t_O}{n^2}}{\left(\frac{t_O}{n}+t_r\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{K_{P.M}}-1\right)+n\left(\frac{1}{k_{T.M}}-1\right)}-\frac{1}{\frac{t_O}{n}+T}\left(\frac{1-\frac{1}{k_{T.M}}}{\left(1+\left(\frac{1}{K_{P.M}}-1\right)+n\left(\frac{1}{k_{T.M}}-1\right)\right)^2}\right)=0;$$

$$\frac{1}{\frac{t_O}{n}+t_T}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{K_{P.M}}-1\right)+n\left(\frac{1}{k_{T.M}}-1\right)}\left[\frac{t_O}{n^2\left(\frac{t_O}{n}+t_T\right)}-\frac{\left(1-\frac{1}{k_{T.M}}\right)}{1+\left(\frac{1}{K_{P.M}}-1\right)+n\left(\frac{1}{k_{T.M}}-1\right)}\right]=0;$$

З умови його екстремуму отримаємо залежність для визначення оптимальної кількості робочих позицій технологічної системи в такому вигляді:

$$n_{opt} = \sqrt{\frac{t_O}{t_T} \cdot \frac{1+\left(\frac{1}{K_{P.M}}-1\right)}{\left(\frac{1}{K_{T.M}}-1\right)}}.$$

Проведемо графічний аналіз отриманого виразу (рис. 10.2), який показує, що величина оптимальної кількості робочих позицій технологічної системи найбільш чутлива до характеристик надійності транспортної підсистеми і швидко зменшується при погіршенні коефіцієнта готовності транспортних модулів або агрегатів.

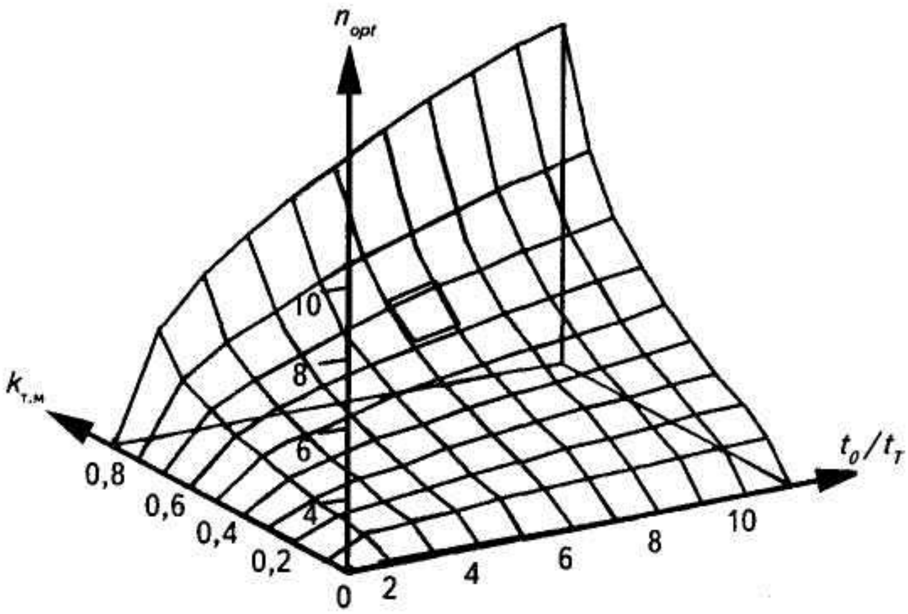


Рис. 1. Залежність оптимальної за продуктивністю кількості робочих позицій від $k_{т.м}$ та відношення

М. М. Гулковський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.Ю. Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА В БАНКІВСЬКІЙ СПРАВІ

Сучасний розвиток комп'ютерної техніки і технологій, багатогранне впровадження автоматизованих засобів керування, збільшення масштабів виробництва продукції, нестабільність економічної ситуації потребує прийняття своєчасних раціональних управлінських рішень. Зростання обсягів інформації, що оброблюється менеджерами підприємств значно ускладнює процес прийняття рішень. Потреба прийняття управлінських рішень вирішується за допомогою дослідження операцій, як сукупності наукових засобів на основі застосування математичних кількісних методів обґрунтування рішень в різних галузях людської діяльності.

Існує достатньо багато ефективних програмних засобів, у яких запрограмовано велика кількість математичних методів, які дозволяють розв'язувати різноманітні задачі та уникати громіздких обчислень.

Програмний пакет аналітичних обчислень Maple є потужним інструментом вирішення певних задач не лише математичного, а й економічного характеру зокрема. У програмі Maple вбудовано пакет для розв'язання задач лінійного програмування simplex, який базується на симплекс-методі.

Розглянемо транспортну задачу як задачу лінійного програмування у банківській сфері.

Задача. Мережа з 5 банків має можливість дати кредит на капітальне будівництво 5 промисловим об'єктам галузевого міністерства. Обсяги кредитів необхідно погасити з урахуванням відсотків, які задані матрицею:

$$\begin{Vmatrix} 15 & 20 & 18 & 15 & 16 \\ 16 & 18 & 16 & 20 & 18 \\ 14 & 19 & 20 & 20 & 15 \\ 16 & 18 & 20 & 18 & 19 \\ 17 & 20 & 17 & 16 & 15 \end{Vmatrix}$$

відповідно до 1 млн. грн. кредиту.

Можливі величини кредиту для кожного банку складають відповідно 200, 350, 180, 300 та 200 млн. грн., а вартість будівництва об'єктів – відповідно 240, 150, 280, 170 та 160 млн. грн.

Знайти оптимальний варіант розв'язку вкладення коштів з максимальною вигодою для банків [1].

Зауважимо, що в цій задачі сумарна величина кредиту банків складає 1230 млн. грн., яка є більшою за сумарну вартість будівництва об'єктів, що становить 1000 млн. грн. В такому випадку буде введено фіктивний шостий об'єкт, в якому залишиться цей залишок товару (230 млн. грн.), при цьому відсоток погашення кредиту дорівнюватиме 0. Використовуючи програму Maple, розв'язуємо цю задачу [2].

> restart : with(simplex) :

$$a := \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \\ 180 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} : b := \begin{bmatrix} 240 \\ 150 \\ 280 \\ 170 \\ 160 \\ 230 \end{bmatrix} : p := \begin{bmatrix} 0.15 & 0.20 & 0.18 & 0.15 & 0.16 & 0 \\ 0.16 & 0.18 & 0.16 & 0.20 & 0.18 & 0 \\ 0.14 & 0.19 & 0.20 & 0.20 & 0.15 & 0 \\ 0.16 & 0.18 & 0.20 & 0.18 & 0.19 & 0 \\ 0.17 & 0.20 & 0.17 & 0.16 & 0.15 & 0 \end{bmatrix} : x := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,6} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} & m_{2,6} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,6} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & m_{5,6} \end{bmatrix} : \sum_{i=1}^{5} 'a_i' = \sum_{j=1}^{6} 'b_j' :$$

$$F := \sum_{i=1}^{5} \left(\sum_{j=1}^{6} "p"[i,j] \cdot "x"[i,j] \right) :$$

$$obmez := \left(\left\{ \sum_{i=1}^{5} 'x'[i,1] = b[1], \sum_{i=1}^{5} 'x'[i,2] = b[2], \sum_{i=1}^{5} 'x'[i,3] = b[3], \sum_{i=1}^{5} 'x'[i,4] = b[4], \sum_{i=1}^{5} 'x'[i,5] = b[5], \sum_{i=1}^{5} 'x'[i,6] = b[6], \sum_{j=1}^{6} 'x'[1,j] = a[1], \sum_{j=1}^{6} 'x'[2,j] = a[2], \sum_{j=1}^{6} 'x'[3,j] = a[3], \sum_{j=1}^{6} 'x'[4,j] = a[4], \sum_{j=1}^{6} 'x'[5,j] = a[5] \right\} \right) :$$

> maximize(F, obmez, NONNEGATIVE) :

> assign(maximize(F, obmez, NONNEGATIVE));'x'= x;'F'= F;

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 40 & 0 & 0 & 130 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 140 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 0 & 160 & 0 \\ 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = 190.80$$

Розв’язання цієї задачі привело до висновку, що вкладення коштів з максимальною вигодою для банків становить 190.80 (млн. грн.). При цьому план надання кредиту з максимальною вигодою для банків буде таким:

- 1-ий банк надає кредит другому промисловому об’єкту у розмірі 150 млн. грн.;
- 2-ий банк надає кредит першому промисловому об’єкту у розмірі 40 млн. грн. та четвертому – у розмірі 130 млн. грн.;
- 3-ий банк надає кредит третьому промисловому об’єкту у розмірі 140 млн. грн. та четвертому – у розмірі 40 млн. грн.;
- 4-ий банк надає кредит третьому промисловому об’єкту у розмірі 140 млн. грн. та п’ятому – у розмірі 160 млн. грн.;
- 5-ий банк надає кредит першому промисловому об’єкту у розмірі 200 млн. грн.

Література

1. *Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф.* Збірник задач з математичного програмування: Навчальний посібник. – Л.: “Магнолія 2006”, 2007. – 212 с.

2. *Прохоров Г. В., Леденев М. А., Колбеев В. В.* Пакет символьных вычислений Maple V / Г. В. Прохоров, М. А. Леденев, В. В. Колбеев – М: Компания Петит, 1998. – 198 с.

Рудик Віталій
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.Ф. Стасюк****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПРОТОКОЛ ОБМІНУ КЛЮЧЕМ

Під протоколом слід розуміти послідовність узгоджених приписів, згідно з якими відбувається обмін повідомленнями між сторонами або учасниками протоколу задля досягнення певної мети. Протокол є прикладом успішного застосування ідеології відкритого ключа. Традиційна схема захисту конфіденційності інформації ґрунтується на наявності надійного каналу для обміну таємним ключем.

Протокол обміну ключем. Наведемо розв’язання проблеми обміну ключем, а саме розглянемо протокол експоненційного обміну ключем. Учасниками протоколу є Аліса та Боб, які спілкуючись через канал, що ймовірно прослуховується, хочуть домовитись про спільний таємний ключ. Ось в чому полягає цей протокол:

1. Аліса вибирає велике просте число p та первісний корінь g за модулем p і відкрито посилає p і g Бобу;
2. Аліса вибирає випадкове число a в межах від 1 до $p-1$, а Боб випадкове число b в цих же межах;
3. Аліса обчислює число $g^a \bmod p$ і посилає це значення Бобу, а Боб обчислює $g^b \bmod p$ і посилає це значення Алісі;
4. І Аліса , і Боб обчислюють одне і те ж число

$$\left(g^b\right)^a \bmod p \equiv \left(g^a\right)^b \bmod p \equiv g^{ab} \bmod p,$$

яке й приймають в якості ключа K.

Приклад 1. Нехай $p=97, g=5.$ Припустимо,що Аліса вибрала число $a=12,$ а Боб
число $b=63.$ Тоді Аліса посилає Бобу $5^{12}(\bmod 97)=42,$ а Боб посилає Алісі $5^{65}(\bmod 97)=75.$. Тоді обоє обчислюють

$$75^{12}(\bmod 97) \equiv 42^{63}(\bmod 97)=21.$$

Отже спільний таємний ключ –це $K=21.$

Суперник, який перехоплює усі повідомлення між Алісою і Бобом стає власником чисел $g^a(\bmod p)$ і $g^b(\bmod p)$. Отже перед суперником постає наступна обчислювальна задача:

Для заданих

$p,g,x,y \in \mathbb{N}$, де $1<g<p-1,$ $x \equiv g^a(\bmod p),$ $y \equiv g^b(\bmod p),$ для деяких a,b

Обчислити $z \equiv g^{ab}(\bmod p).$

Ця задача еквівалентна до розкриття криптосистеми Ель-Гамаля, тобто є нелегкою задачею дискретного логарифмування.

Криптосистеми на еліптичних кривих будуються так само, як в простих скінчених полях. При цьому піднесення до високого степеня за великим модулем , що визначає стійкість шифру, замінюється на скалярний добуток точки еліптичної кривої. Далі наведемо протокол обміну ключем на еліптичній кривій.

Створення спільного ключа на еліптичній кривій. Формуємо еліптичну криву $E_p(a,b): y^2 = x^3 + ax + b$, вибираємо просте число p і точку $G(x,y)$ еліптичної кривої $E_p(a,b)$ порядку n, тобто таку, що $nG(x,y) = O$, де n – достатньо велике ціле число, яке менше ніж кількість точок кривої $E_p(a,b)$.

Формування спільного ключа

1. Аліса обирає число $k_A < n$ і генерує відкритий ключ $Y_A = k_A G$.
2. Боб обирає число $k_B < n$ і генерує відкритий ключ $Y_B = k_B G$.
3. Аліса генерує таємний ключ $K = k_A Y_B$, а Боб –таємний ключ $k_B Y_A$.

Отже маємо

Відкритий ключ; $E_p(a,b), G.$

Таємний ключ Аліси k_A,

Таємний ключ Боба k_B,

Спільний таємний ключ K.

Коректність

Дійсно ключ K – спільний через те,що

$k_A Y_B = k_A(k_B G) = k_B k_A G = k_B Y_A = K.$

Приклад 2. Формуємо еліптичну криву $E_p(3,5): y^2 = x^3 + 3x + 5$, вибираємо просте число $p = 47$ і точку $G(5,45)$ еліптичної кривої $E_p(3,5)$ порядку 61, тобто таку, що $61G(x,y) = O$.

Формування спільного ключа

1. Аліса обирає число $k_A = 11 < n = 61$ і генерує відкритий ключ $Y_A = 11G = (11,37)$.
2. Боб обирає число $k_B = 17 < n = 61$ і генерує відкритий ключ $Y_B = 17G = (44,43)$.
3. Аліса генерує таємний ключ $K = k_A Y_B = 11(44,43) = (9,3)$, а Боб –таємний ключ $k_B Y_A = 17(11,37) = (9,3)$.

Отже маємо

Відкритий ключ; $E_p(3,5): y^2 = x^3 + 3x + 5.$

Таємний ключ Аліси $k_A = 11$,

Таємний ключ Боба $k_B = 17$,

Спільний таємний ключ $K = (9,3)$.

Суть переходу до еліптичних кривих полягає в заміні відносно повільної операції піднесення до степеня за великим модулем на швидшу операцію скалярного множення на еліптичній кривій.

Література

3. М.В.Захарченко Асиметричні методи шифрування в телекомунікація. Навчальний посібник / М.В.Захарченко, О.В. Онацький, Л.Г.Йова, Т.М. Шинкарук. – Одеса: 2011. – 184 с.
4. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии / Коблиц И.. – Москва.: Наука, Изд-во ТВП, 2001. – 260 с.

Т.П. Петрученко, Р.С. Лизун
Національний університет «Львівська політехніка»
Науковий керівник ***О.Я. Бродяк,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ У ЗАДАЧАХ НА ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ЛАНЦЮГОВОЇ ЛІНІЇ

Одним із застосувань визначеного інтеграла є обчислення довжини дуги плоскої кривої. Нехай у прямокутних координатах на площині задана крива рівнянням $y = f(x)$, де функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має неперервну похідну. Тоді довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

Ланцюгова лінія, чи катена́рія (від лат. catēna – «ланцюг») – лінія, форму якої набуває гнучка однорідна нерозтяжна важка нитка або ланцюг із закріпленими кінцями. Протягом сторіч відомі вчені досліджували ланцюгову лінію, знаходили закономірності, досліджували їх властивості. На сьогодні вже відомо безліч можливостей її застосування. В області техніки ланцюгова лінія використовується в розрахунках, пов'язаних з провисанням “ниток” – проводів, тросів тощо. Вона знаходить застосування в будівельній техніці при проектуванні склепінь. Ланцюгова лінія використовується також в будівництві арок (оскільки форма арки у вигляді перевернутої ланцюгової лінії найбільш вдало розподіляє навантаження). Однорідна арка у формі перевернутої ланцюгової лінії відчуває тільки деформації стиску, але не зламу. У прямокутних координатах рівняння ланцюгової лінії записується, застосовуючи функцію косинус гіперболічний, у вигляді

$$y = a\,ch\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Параметр a, який входить у рівняння визначається за допомогою формули $a=\frac{T}{\gamma}$, де T – натяг "нитки" у вершині, γ – питома щільність матеріалу, з якого зроблена "нитка".

Визначимо довжину дуги ланцюгової лінії $y=\frac{5}{2}\left(e^{\frac{x}{5}}+e^{-\frac{x}{5}}\right)$ від точки $M_1(0{,}5)$ до $M_2\left(5,\frac{5}{2e}(e^2+1)\right)$. Застосовуючи наведену у роботі формулу, знаходимо

$$l=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{e^{\frac{x}{5}}-e^{-\frac{x}{5}}}{2}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^5\left(e^{\frac{x}{5}}+e^{-\frac{x}{5}}\right)dx=\frac{5}{2}\left(e-e^{-1}\right).$$

В.П. Рій
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Ю. Чмир****, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МЕХАНІКИ

Найбільш ефективними методами вивчення різноманітних фізичних процесів і явищ є створення та використання математичних моделей, які допомагають зрозуміти фізичний процес, дають можливість установити якісні та кількісні характеристики його стану. Використовуючи математичні моделі можна передбачити певний подальший розвиток процесу.

Вивчаючи фізичні явища можна виявити деяку функціональну залежність між невідомими характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять похідні невідомих характеристик процесу. У багатьох випадках такою залежністю буде диференціальне рівняння.

Часто при складанні диференціальних рівнянь використовують фізичний зміст похідної як швидкості перебігу процесу і другої похідної як швидкості зміни швидкості, тобто прискорення. Таким чином, існують диференціальні рівняння, які містять не тільки першу похідну від шуканої функції, але й похідні вищих порядків. Такі диференціальні рівняння називаються диференціальними рівняннями вищих порядків.

Розглянемо прикладну задачу, яка приводить до диференціального рівняння другого порядку.

Задача. Консольна стальна балка довжиною $AB=6$ м навантажена зосередженою силою $P=2\cdot10^4$ Н в кінці B. Знайти рівняння пружної лінії і визначити величину прогину кінця балки (модуль пружності $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па, момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі $J = 3 \cdot 10^{-4}$ м^4).

Складемо математичну модель та знайдемо розв'язок задачі.

Згинальний момент M для перерізу з центром в точці $N(x; y)$ дорівнює моменту сили P відносно точки N, тобто $M = P(l - x)$, який береться зі знаком плюс, (сила прикладена до балки справа від перерізу і обертає праву частину балки за стрілкою годинника).

З курсу опору матеріалів відомо, що диференціальне рівняння пружної лінії матиме вигляд

$$y'' = \frac{M(x)}{E \cdot J},$$

де M – згинальний момент, E – модуль пружності, J – момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі. Тоді

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \cdot J}(l - x).$$

Безпосереднім інтегруванням знаходимо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{E \cdot J}\int (l - x)\, d(l - x) + C_1 = -\frac{P}{E \cdot J}\frac{(l - x)^2}{2} + C_1.$$

Звідси загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = \frac{P}{E \cdot J}\frac{(l - x)^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Сталі C_1, C_2 визначаємо з початкових умов $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

тобто $\begin{cases} 0 = \dfrac{P}{E \cdot J} \cdot \dfrac{l^3}{6} + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 0 = -\dfrac{P}{E \cdot J} \cdot \dfrac{l^2}{2} + C_1. \end{cases}$ Звідси $C_1 = \dfrac{P}{E \cdot J} \cdot \dfrac{l^2}{2}$, $C_2 = -\dfrac{P}{E \cdot J} \cdot \dfrac{l^3}{6}$.

Підставляючи значення C_1 та C_2 в загальний розв'язок, одержуємо шукане рівняння пружної лінії

$$y = \frac{P}{2E \cdot J}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

Прогином балки називається ордината пружної лінії в розглянутому перерізі.

Величину прогину h на кінці балки B одержуємо з останньої рівності, задовольняючи умову $y(l) = h$: $h = \dfrac{Pl^3}{3E \cdot J} = \dfrac{2 \cdot 10^4 \cdot 6^3}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \approx 23$ мм.

Підставляючи числові значення і приводячи їх до єдиної розмірності, знаходимо величину прогину $h = \dfrac{2 \cdot 10^4 \cdot 6^3}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \approx 23$ мм.

Література
1. *Пономарев К.К.* Составление дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1973. – 560 с.
2. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.

СЕКЦІЯ 2. Математичні відкриття, що змінили світ

В.М. Петровський, В.В. Коломієць
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник ***О.В. Білаш,*** *к.е.н.*

МАТЕМАТИКА ТА ЇЇ РОЛЬ У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

Математика – це фундаментальна наука, яка зародилася ще до нашої ери і досі активно розвивається. Математика широко використовується майже у всіх сферах життя людини, зокрема у торгівлі, будівництві, виробництві різних предметів, у тому числі і зброї. Математика є одним з потужних інструментів пізнання і використання законів збройної боротьби в теорії і практиці військової справи. Ефективне використання математики у військовій сфері стало можливим завдяки застосуванню електронних обчислювальних машин, здатних за короткий час вирішувати складні і трудомісткі задачі, пов'язані з перебуванням оптимальних рішень.

Сенс застосування математичних методів в процесах управління бойовими діями військ полягає в тому, щоб, використовуючи знання законів, закономірностей і принципів збройної боротьби, скоротити терміни підготовки прийнятих рішень і підвищити їх якість, домогтися наявними силами і засобами найкращих результатів бойових дій.

Застосування математичних методів в поєднанні з електронними обчислювальними машинами дає можливість вирішувати завдання такого роду, забезпечуючи досить швидкий і достовірний прогноз ходу бойових дій для аналізу будь-яких можливих варіантів рішень. Для скорочення термінів і підвищення якості прийнятих рішень необхідно автоматизувати процеси збору і обробки інформації (про противника, свої можливості в районі бойових дій) і весь процес вироблення рішення в цілому. Це досягається шляхом використання електронних обчислювальних машин для визначення найбільш ефективних способів досягнення кінцевої мети бою, бойових дій і операції і складає одну з істотних сторін використання математики у збройній боротьбі.

Математика в сучасних умовах відіграє дуже важливу роль в дослідженні збройної боротьби і використанні виявлених залежностей і закономірностей, які виявляють свою дію через принципи військового мистецтва. Математика дає можливість найбільш повно враховувати і реалізовувати ці принципи за допомогою вироблення кількісних рекомендацій виходячи з урахування конкретних реальних умов бойової дійсності. В цьому якраз і криються можливості математики, так як аналіз і врахування конкретних кількісних змін можуть призвести до якісних змін.

Військове мистецтво є осередком бойового досвіду, накопиченого протягом багатьох століть. Щоб виявити і встановити закономірності збройної боротьби, потрібні були вивчення і аналіз багатовікового досвіду ведення воєн. До появи електронних обчислювальних машин і методів моделювання бойових дій це був єдино правильний шлях. Інших шляхів не було. Однак у міру розвитку прикладної математики, зокрема методів моделювання бойових дій, і широкого застосування електронних обчислювальних машин становище змінюється.

Математика дає можливість моделювати бойові дії, а отже, розкривати і встановлювати закономірності ведення збройної боротьби за допомогою різних математичних моделей. Моделювання бойових дій – це інструмент для прогнозування можливих результатів бойових дій та розроблення рекомендацій по їх плануванню і веденню. Ставлячи різні умови і вводячи різні вихідні дані, можна багаторазово відтворювати різні ситуації, накопичувати статистичний матеріал, виявляти залежності і закономірності, визначати принципи ведення збройної боротьби та знаходити оптимальне тактичне рішення.

Об'єктивність виявлених закономірностей буде залежати від адекватності математичних моделей модельований процесам збройної боротьби. Так, зокрема, для визначення жертв воєнних дій, дійсних або потенційних, найбільше значення мають наступні чотири моделі: модель Ланчестера, у якій кількість жертв пропорційна до кількості сутичок між індивідумами ворогуючих сторін, а найбільш актуальною вона є тоді, коли дві сторони розташовуються на загальній території; модель Осипова, коли кількість жертв пропорційна чисельності протилежного боку; модель Петерсона, коли кількість жертв визначається чисельністю свого боку і чим більше своїх підводних човнів несуть бойове чергування, тим більше їх гине; модель Брекні, коли кількість жертв одного боку пропорційна до кількості сутичок, а іншої – до чисельності її противника.

Отже, одним із потужних інструментів пізнання та використання законів війни в теорії та практиці військової справи є математичне моделювання. Метод моделювання зазвичай застосовують для вивчення вихідних об'єктів тоді, коли безпосереднє їх вивчення або з якихось причин незручне або неможливе. Основними цілями, заради яких створюються моделі, є: підтвердження або спростування різних теорій і гіпотез; виявлення залежностей різних параметрів моделі, характеру їх взаємодії в часі і просторі, знаходження оптимальних співвідношень цих параметрів; застосування в якості систем віртуальної реальності.

Література

1. Меншуткин В. В. Искусство моделирования / В. В. Меншуткин. – Петрозаводск, СПб. – 2010. – с. 416.
2. Самарский А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. – 1997. – с. 320.
3. Мироновский Л. А. Моделирование разностных уравнений: учеб. пособие. / Л. А. Мироновский. – СПб.: СПбГУАП. – 2004. – с.358.
4. Митюков, Н. В. Имитационное моделирование в военной истории / Н. В. Митюков. – М.: Изд-во ЛКИ. – 2011. – с.280.

В.М. Віблий
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.Ю.Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРОГРАМУВАННІ

Одним із найвидатніших винаходів XX ст. є створення комп’ютера – універсальний автоматичний перетворювач інформації, визначальну роль у створенні якого відіграли вчені-математики. З появою комп’ютера у багатьох математиків виник перерозподіл зацікавленості своїм предметом досліджень. У свою чергу, комп’ютер вплинув і на саму математику, а саме він став рушійною силою у створенні новітніх ідей і задач, сприяв появі нових дисциплін та напрямів математичних досліджень. Зокрема, з’явився окремий розділ сучасної математики – дискретна математика.

Історія дискретної математики пов’язана з розв’язанням складних проблем, які привернули увагу багатьох науковців в тій чи іншій галузі математики. Наприклад, в теорії графів багато досліджень було викликано спробами довести теорему чотирьох кольорів, вперше сформульовану 1852 року, але не доведену до 1976 (Кеннет Аппель і Вольфганг Хакен – довели використовуючи суттєву допомогу комп'ютера).

Дискретна математика – це галузь математики, що вивчає властивості будь-яких дискретних структур. Як синонім іноді вживається термін дискретний аналіз, що вивчає властивості структур скінченного характеру.

Головним критерієм, за яким різноманітні розділи математики (як ті, що виникли в давні часи, так і ті, що з’явились у XX ст.) об’єднують під назвою "дискретна математика", є те, яке відношення вони мають до теорії та практики проектування, використання електронних обчислювальних машин і програмування. Тому дискретну математику останнім часом справедливо називають комп’ютерною математикою.[1]

Для різного рівня програмування корисні свої розділи математики. Наприклад, для 3D моделювання – аналітична геометрія, для шифрування – лінійна алгебра та статистика. Маючи базові математичні знання, по-перше, розвивається абстрактне мислення, яке дозволить краще подивитися на завдання, розбити його на логічні частини, знайти нові підходи до його вирішення, по-друге – оцінка складності алгоритмів, за допомогою якої до того, як написати код, потрібно зрозуміти чи використовувати цей алгоритм, чи взагалі взяти якийсь інший, щоб він був більш ефективним.

Розглянемо різні теорії, які входять в основний курс “Дискретна математика”, а також в інші математичні дисципліни.

Теорія інформації – це розділ кібернетики, в якому за допомогою математичних методів вивчаються способи вимірювання інформації та методи її кодування з метою стиснення інформації і надійної передачі каналами зв’язку.

Застосування в логіці математичних методів стає можливим тоді, коли судження формулюються деякою точною мовою. Такі точні мови мають дві сторони: синтаксис і семантику.

Варто зазначити, що на практиці безліч елементарних логічних операцій є обов’язковою частиною набору інструкцій всіх сучасних мікропроцесорів, і відповідно входить до мови програмування. Це є одним з найважливіших практичних додатків методів математичної логіки, що вивчаються в сучасних підручниках інформатики.

Теорія графів знаходить застосування, наприклад, в геоінформаційних системах (ГІС). Побудовані або запроектовані будинки, споруди, квартали тощо розглядаються як вершини, а з‘єднують їхні дороги, інженерні мережі, лінії електропередачі тощо – як ребра. Застосування різних обчислень, вироблених на такому графі, дозволяє, наприклад, знайти найкоротший об’їзний шлях або найближчий продуктовий магазин, спланувати оптимальний маршрут.

Теорія ігор – розділ прикладної математики, який використовується в соціальних науках (найбільше в економіці), біології, політичних науках, комп’ютерних науках (головним чином для штучного інтелекту) і філософії. Теорія ігор намагається математично зафіксувати поведінку в стратегічних ситуаціях, в яких успіх суб’єкта, що робить вибір залежить від вибору інших учасників.

Теорія рішень – царина досліджень, якаматематичними методамидосліджує закономірності вибору людьми найвигідніших із можливих альтернатив і має застосування в економіці, менеджменті, когнітивній психології, інформатиці та обчислювальній техніці.

Основними задачами дискретної математики є:

- з’ясування того, які властивості мають ті чи інші дискретні об’єкти разом з заданими на них функціями, операціями, відношеннями (аналіз);
- побудова дискретних об’єктів, які задовольняють заданим властивостям (синтез). [2]

На сьогоднішній день дискретна математика входить до навчальних програм багатьох факультетів університетів та інших вищих навчальних закладів. Однак темпи розвитку комп’ютерних систем, а особливо програмного забезпечення такі, що знання про конкретні системи, отримані під час навчання, часто уже є застарілими на момент його завершення. Фахівець, який бажає завжди бути обізнаним щодо ідей, новацій і прогресу, має подбати про фундаментальну теоретичну підготовку. Формування інтелектуальних навичок і вмінь немислиме без активних індивідуальних дій, без набуття самостійного досвіду й практики у процесі розв'язування задач, що, безумовно, є найкращим способом засвоєння будь-яких теоретичних математичних понять, методів, концепцій і результатів, перевірки правильності та повноти розуміння матеріалу.

Література

1. *Трохимчук Р.М., Нікітченко М.С.* Дискретна математика в прикладах і задачах: навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ: Київський університет, 2017. – 248 с.
2. *Шевченко Г.В.* Дискретна математика. Навчально-методичнтй посібник / Г. В. Шевченко – К.: ДУТ, 2015. – 158 с.

І.В.Черевач
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І.Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

РОБОТИ МИХАЙЛА КРАВЧУКА – ОСНОВА СТВОРЕННЯ ПЕРШОГО КОМП'ЮТЕРА

У 1937 році американський інженер Атанасов гортав два томи монографії Михайла Кравчука "Розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь". Український математик пропонував унікальні методи, які спрощували обчислення і вперше дозволяли їх автоматизувати. Атанасов був за крок від розробки першого у світі комп'ютера, але йому хотілося ще більше дослідити геніальні рішення українця.

Інженер вирішує напряму сконтактуватись із Кравчуком і відправляє до Києва листа, у якому зазначає: "Ваша серія робіт щодо розв'язання диференціальних рівнянь виявилася дуже корисною у моїй роботі". Він просить вислати й інші наукові праці.

Михайло Кравчук був знаною фігурою в наукових колах України. [2,15.]

Хлопець із волинського села Човниця змалку виявив хист до навчання – Луцьку гімназію закінчує з медаллю, а за успішність на фізико-математичному факультеті Київського університету отримує стипендію у 50 карбованців. Професор Дмитро Граве настільки пишається своїм студентом, що рекомендує математичній спільноті звернути увагу на його наукові роботи. Ученого запрошують викладати у київських інститутах та гімназіях – так його учнями стали легендарний конструктор ракет Сергій Корольов та творець перших турбореактивних двигунів для радянських винищувачів Архип Люлька. [4,40.]

Кравчук їздить з лекціями й за кордон. Науковці в Торонто, Парижу та Болоньї слухають його доповіді про наближене інтегрування лінійних диференціальних рівнянь, тоді як Американська асоціація математиків і взагалі пропонує переїхати на інший континент. Кравчук відхиляє всі пропозиції. [3,15.]

Науковець вдосконалює теорію математичної статистики, матриць і визначників, при цьому свої монографії публікує українською мовою й першим створює український словник математичних термінів. Студенти розповідали, що він настільки гарно володів українською, що дехто пробирався на його пари лише для того, щоб почути, як він розмовляє.[1,10.]

Така позиція не подобається більшовикам. Проти математика починають готувати справу. Саме в цей непростий час, 9 вересня, американець і відправить свого листа до Києва. До Кравчука він так і не дійде, адже вже 5 днів у газеті “Комуніст” з’явиться гнівна стаття: “Академік Кравчук рекламує ворогів”. Її автори запевняли, що роботи вченого “викликали глибокий гнів у всіх чесних радянських математиків”, адже Кравчук не лише підтримує з “неблагонадійними” математиками дружні зв’язки, а й навіть видає книги у співавторстві. Атанасов про це нічого не знав і, не отримавши відповіді на перший лист, написав у листопаді до Української асоціації культурних зв’язків з іноземними країнами, де знову попросив надіслати йому монографії Кравчука про диференціальні рівняння.

Можливо, ви б могли довідатися, чи мої листи дійшли до професора Кравчука, і якщо так – чому він не відповідає, – написав у листі Атанасов. Хіба міг уявити американець, що провідного європейського математика за вигаданими звинувачуваннями засудили на 20 років в’язниці та 5 років заслання. З Лук’янівської в’язниці його відправляють на Колиму добувати золото. 1942 року вченого не стане. Того ж року за океаном Атанасов разом з інженером Беррі успішно протестують перший у світі цифровий обчислювальний пристрій – комп’ютер ABC (Atanasoff-Berry Computer), у якому вперше використали двійкову систему числення, електронну логічну систему, паперові перфокарти, а як запам’ятовувальні пристрої застосували конденсатори. [5,544.]

Хтозна чи ми колись би довідалися про цю історію, якби не професор Школи політичних досліджень Університету Оттави Іван Качановський, який в архівах Університету Айови натрапив на ці листи і розповів світу про внесок українця. В наш час математичні рішення Кравчука допомагають науковцям з усього світу обробляти та відновлювати зображення відеоматеріалів, розпізнавати характер пухлин та розшифровувати арабські рукописні слова.

Література:

1. Вірченко Ніна. Математик від Бога, педагог – від Серця // Слово Просвіти. – № 16 (653), 19 – 25 квітня 2012 року. – С. 6-10.

2. Букет Євген. Свято математики // Слово Просвіти. – № 17 (654), 26 квітня – 2 травня 2012 року. – С. 15.
3. Шендеровський Василь. Нарівні зі славетними математиками // Нехай не гасне світ науки. – Київ: Рада, 2003. – С. 148-154. – ISBN 966-70-87-51-4.
4. Михайло Пилипович Кравчук / Укладачі: Н.О. Вірченко, Г.М. Сита. – Київ: Наукова думка. – 1992. – 40 с.
5. Сита Г. Слідча справа Михайла Кравчука // Наука і культура. – Київ. – 1994. – № 28. – С. 116-127. 6. Вірченко Н.О. Корифей української математики // Аксіоми для нащадків / Упор. О. Романчук. – Львів: Меморіал. – 1992. – 544 с.

А.В. Борисенко
Херсонський національний технічний університет
*Науковий керівник **Т.В. Маломуж**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання*

ГАРМОНІЧНИЙ РЯД ТА ДОВЕДЕННЯ ЙОГО РОЗБІЖНОСТІ

Як відомо, ***гармонічним рядом*** називається ряд виду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Назва ряду пов'язана з тим, що починаючи з другого члена ряду кожний член ряду є середнім гармонічним попереднього та наступного членів ряду. Вперше така назва зустрічається в роботах англійського математика, першого президента Лондонського королівського товариства Уільяма Браункера в 1668 р.

Число ***c*** називається ***середнім гармонічним*** чисел ***a*** і ***b***, якщо

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Для гармонічного ряду маємо:

$$\frac{1}{u_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n-1}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right),\ n\geq 2\,.$$

Перше відоме доведення розбіжності гармонічного ряду належить французькому вченому Ніколю Орему і міститься в його творі «Quaestiones super geometriam Euclidis» (біля 1350 р) [1, С. 281]. Трактат не був надрукований свого часу і вийшов друком у 1961 р. [2]. Доведення Ніколя Орема ґрунтується на ознаці порівнянь рядів і сучасною нотацією виглядає так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

У 1647 р П'єтро Мєнголі дав доведення іншим методом. У 1650 р вийшла друком його робота «Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum». У цій книзі П'єтро Мєнголі доводить розбіжність гармонічного ряду, спираючись на нерівність [4, С. 158-159]:

$$\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}>\frac{1}{k}.$$

Доданки гармонічного ряду П'єтро Мєнголі групує у кількостях степенів трійки:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)\right]+\ldots>$$

$$>1+1+\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\right]+\ldots>$$

$$>1+1+1+\ldots$$

Сорок років потому Йоганн Бернуллі винайшов третій метод доведення, а ще через кілька років четвертий метод доведення запропонував Якоб Бернуллі [3]. Обидва доведення були надруковані в роботі Якоба Бернуллі «Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis eqrumque sum finita».

Якоб Бернуллі помітив [5], що гармонічний ряд може бути розкладений на групи доданків:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots$$

Розглянемо одну групу без першого доданка:

$$\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{k^2}\right).$$

Кількість доданків в цій групі (k^2-k). Найменший доданок в кожній групі – останній, тому можемо записати нерівність:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{k^2}>(k^2-k)\cdot\frac{1}{k^2}=1-\frac{1}{k}.$$

Додамо до обох частин нерівності $1/k$:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{k^2}>1.$$

Очевидно, що члени гармонічного ряду можуть бути згруповані у групи, суми яких перевищують одиницю:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots>1+1+1+\ldots$$

З появою фундаментальних робіт Огюстена Коші було з'ясовано, що розбіжність гармонічного ряду може бути доведена через границю послідовності частинних сум, на підставі інтегральної ознаки Коші та багатьох інших більш пізніх результатів з теорії рядів.

Узагальнення гармонічного ряду відіграють значну роль в аналітичній теорії чисел. Одне з таких узагальнень міститься в гіпотезі Бернхарда Римана (1859) щодо розташування нетривіальних нулів дзета-функції. Гіпотеза Римана в сукупності з гіпотезою Християна Гольдбаха складають восьму проблему Девіда Гільберта, яка до цього часу лишилася нерозв’язаною.

Література

1. Юшкевич А. П. (ред.) (1972) История математики. Т. 1. С древних времен до начала нового времени. Москва: Наука.
2. Oresme, Nicole (1961). Quaestiones super geometriam Euclidis. H.L.L. Busard (Ed.). Leiden: Brill.
3. Дербишир Дж. (2010). Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. Москва: Астрель.
4. Юшкевич А. П. (ред.) (1972) История математики. Т. 2. Математика VII столетия. Москва: Наука.
5. Сумма ряда обратных квадратов (Basel problem). Retrieved from the http://hijos.ru/2011/02/27/summa-ryada-obratnyx-kvadratov-basel-problem/

А.П. Доценко
Херсонський національний технічний університет
Науковий керівник ***Т.П. Білоусова****, старший викладач*
кафедри вищої математики і математичного моделювання

ГЕОМЕТРІЯ М.І. ЛОБАЧЕВСЬКОГО: ШЛЯХ ВИЗНАННЯ

Математики кожної епохи залишають нащадкам не тільки нові теорії, відкриття, розв’язані задачі, але й не розв’язані проблеми. Багато поколінь учених намагалися розгадати таємницю постулату про паралельні прямі, але нікому це не вдавалося.

Давньогрецький математик Евклід, автор «Начал», жив і працював у III ст. до н. е. в місті Александрії. В усьому світі геометрію вивчали за Евклідом. На її основі зводилися класична механіка і фізика. Тріумфом її був вихід у 1687 році «Математичних начал натуральної філософії» І. Ньютона. Закони небесної і земної механіки та фізики встановлювалися в них в абсолютному евклідовому просторі.

Але були в знаменитій книзі й недоліки. Їх виявили ще сучасники Евкліда. Багато математиків доповнювали «Начала», вдосконалювали доведення окремих теорем і формулювання різних означень. Особливо непокоїв математиків логічний фундамент «Начал»: означення вихідних об’єктів, якими оперує геометрія, вибір аксіом і постулатів. Постулатами Евклід назвав вимоги, які, як і аксіоми, треба було приймати без доведень, щоб потім на їх основі доводити теореми і виконувати геометричні побудови. Чотири перші постулати не викликали сумнівів. Але цього не можна було сказати про останній, п’ятий постулат Евкліда. У ньому йшлося про паралельні прямі: «І коли пряма, що падає на дві прямі, утворює внутрішні односторонні кути, сума яких менша від двох прямих, тоді ці прямі, продовжені необмежено, зустрінуться з тієї сторони, з якої ця сума менша від двох прямих». Щоб перевірити правильність п’ятого постулату, треба було необмежено продовжити прямі. Тільки це дало б можливість побачити як вони поводяться. Зрозуміло, що практично цього не можна здійснити. Отже, п'ятий постулат швидше нагадує теорему, яка потребує доведення, ніж істину, що приймається на віру. Очевидно, Евклід намагався довести п’ятий постулат, але зазнавши невдачі, не поспішав застосовувати його. Його послідовники, намагаючись довести п’ятий постулат, приймали твердження, еквівалентне п’ятому постулату. На цю характерну помилку вказував вже давньогрецький мислитель Аристотель (381-322 до н.е.); філософ стародавнього світу Прокл Діадох (410-485); азербайджанський астроном і математик Мухаммед Насіреддін Тусі (1201-1274); англійський математик Джон Валліс (1616-1703); італійський логік і математик Саккері (1667-1733); французький математик Лежандр (1752-1833). Але зародки нового швидко гинули внаслідок вікової традиції незаперечного авторитету Евкліда. Кінець кінцем таємницю п’ятого постулату заради особистої безпеки дехто вирішив краще обминати. Навіть король математиків Карл-Фрідріх Гаусс (1777-1855), підсумовуючи більш як двохтисячолітній поєдинок з п’ятим постулатом, був змушений визнати: «...Якщо ми хочемо говорити чесно та відверто, то треба сказати, що, по суті, за 2000 років ми не пішли в цьому питанні далі, ніж Евклід».

11 (23) лютого 1826 р. професор Казанського університету Микола Іванович Лобачевський виступив на засіданні фізико-математичного факультету з доповіддю на тему «Стислий виклад основ геометрії із строгим доведенням теореми про паралельні лінії». Спочатку доповідача слухали уважно. Та скоро аудиторія насторожилась. «Уявлювана геометрія», яку шановний професор розкривав перед слухачами, викликала замішання, вони її не сприйняли. Доповідь Лобачевського не обговорювали, письмового висновку на поданий рукопис також ніхто не наважився дати. Рукопис сховали в архіві. Але це не спинило вченого. У 1829 році на сторінках наукового журналу «Казанский вестник» з’явилася його праця «Про начала геометрії». Це був перший друкований твір з неевклідової геометрії. Автор не обмежився викладом основ нової математичної галузі, а дав початки аналітичної геометрії, виклав теорію вимірювання. Ця робота знаменувала революційний переворот у науці.

Твір «Про начала геометрії» в 1832 р. відіслали до Академії наук. Написати відгук доручили М. В. Остроградському, який не зрозумів виклад нової геометрії Лобачевського. 1834 р. був роком нових випробувань для Лобачевського, відкриття геніального вченого піддавались гострій критиці. Учений мужньо зустрів несправедливість. Усі сили він віддавав дальшій розробці нової геометрії, дослідженням у галузі алгебри, математичного аналізу, астрономії, теорії ймовірностей.

Уперше про велике значення свого відкриття він почув лише 31 травня 1842 року, коли професор П.І. Котельников виголосив промову на тему «Про упередженість проти математики». У цей час його праці вже були відомі вченим Західної Європи. А в 1842 р. за пропозицією Гаусса Лобачевського одноголосно обрали членом-кореспондентом Геттінгенського Королівського товариства наук. Усе життя він несхитно йшов обраним шляхом.

Тільки після смерті Лобачевського (24 лютого 1856 року) його геометрія дістала повне визнання. Твори видатного вченого перекладали на французьку, італійську, англійську та інші мови народів Західної Європи. Уже в XX ст., коли з'ясувалося, що топологічна структура реального фізичного простору не є евклідовою, а має складнішу природу, геометрії Лобачевського судилося пережити новий тріумф. Вона стала теоретичною основою теорії відносності науки про геометрію фізичного простору-часу.

Література

1. Гудков Д. А. Н. И. Лобачевский. Загадки биографии. Н. Новгород: Изд-во ННДУ, 1992. 242 с.
2. Каган В. Ф. Лобачевский. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 58.
3. Васильев А.В. Николай Иванович Лобачевский (1792-1856). М.: Наука, 1992. 229 с.

Д.О. Гончарова
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.Е. Васильєва** д.т.н., професор кафедри прикладної математики і механіки*

ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВІ ТАКСОНОМІЇ БЛУМА

Сучасний науковий прогрес ставить перед системою освіти принципово нові завдання:сформувати особистість людини,ефективно реагуючого на постійні зміни технології як на своєму робочому місці так і в цілому технологічному ланцюжку. Сьогодення стає дедалі складнішим,що вимагає вміння вирішувати складні проблеми,критично ставитись до обставин,порівнювати альтернативні точки зору та приймати самостійні виважені рішення.Поступово традиційні методи навчання змінюються інноваційними,що спрямовані на інтелектуальний розвиток особистості.

Важливо відзначити, що технологія розвитку критичного мислення допомагає самостійно визначати напрям у вивченні теми і самостійно вирішувати проблеми, тобто «мислити по-справжньому».

Критичне мислення – це мислення вищого порядку; воно спирається на отриману інформацію, усвідомлене сприйняття власної розумової діяльності в інтелектуальному середовищі. Однак рівень критичності визначається не тільки запасом знань, а й особистісними якостями, установками, переконаннями. Критичність особистості повинна бути спрямована на аналіз і оцінку своїх можливостей, особистісних якостей, вчинків, поведінки в цілому.

Таксономія Блума у сфері математики, як основний засіб формування навичок XXI століття, визначає способи класифікації розумових умінь, починаючи від найпростіших навчальних дій до найбільш складних. Бенджамін Блум і його команда розробили ієрархію розумових умінь, у якій більш високі рівні мислення включають усі пізнавальні вміння нижчих рівнів.

Піраміда Блума − система, яка здатна організувати та впорядкувати діяльність відповідно до різних рівнів освітніх цілей.

Рівні «аналізу» та «синтезу» − рівні розвитку мислення з використанням набутих знань та умінь. Ці рівні передбачають використання знань й умінь у знайомих або нових ситуаціях. Якщо попередньо пояснити процес виконання завдання, то розв’язування буде демонструвати лише знання та розуміння вивченого матеріалу, в іншому випадку - використовуються знання та навички у нових ситуаціях.

Завдання для рівня «оцінювання» нетрадиційні і вимагають глибоких знань з предмета, а також вміння адаптувати ці знання до вирішення завдань. Для реалізації рівнів «знання» та «розуміння» новий матеріал з математики
корисно подавати у вигляді блок-схем, таблиць, малюнків, пірамід і т.п. Останній етап передбачає саме творчий підхід ,оскільки доводиться працювати з різними джерелами інформації. Такий підхід вивільняє час для розв'язання системи усних і письмових завдань, спрямованих на саморозвиток особистості, формування компетенції. Багаторазове повторення матеріалу в найрізноманітніших формах, групування і подача матеріалу різними способами доводять, що навчання під силу всім.

Сьогодні комп'ютер реально стає незамінним помічником будь-кого в опануванні інформаційних потоків, допомагає моделювати та ілюструвати процеси, явища, об'єкти та події. Особливо важливим є те, що, сучасні комп'ютерні технології в поєднанні з новітніми освітніми технологіями стають ефективними засобами розвитку мислення. Створення презентацій, математичних газет, карт знань, діаграм, схем, таблиць, опитувальних форм, он-лайн ігор та вправ, відео тощо за допомогою комп’ютера показує способи поєднання критичного мислення з математикою, унаочнити матеріал.

Знаючи блумівські рівні розвитку когнітивної сфери можна визначити, хто здатен до застосування, аналізу, синтезу матеріалу, а хто ще знаходяться на нижчих рівнях.

Висновки

При регулярному застосуванні таксономії Б.Блума підвищується мотивація до предмета, кожен має можливість працювати в індивідуальному режимі, а також з’являються навички роботи в парах, групах, розвиваються навички самооцінювання і взаємооцінювання, поліпшується засвоєння матеріалу, підвищується якість знань з предмету, оцінювання результатів навчання прозоре і об'єктивне. Навчальний процес сприяє розвитку навичок мислення високого рівня, формуванню креативності.

Інтерес до вивчення математики багато в чому залежить від того, як проходять заняття. Застосування інноваційних методів роботи дозволяє зробити його нетрадиційним, яскравим, насиченим, наповнюючи його зміст знаннями з інших наочних областей, що перетворюють математику з об'єкту вивчення в засіб отримання нових знань.

Література

- https://www.criticalthinking.expert/
- http://www.myshared.ru/
- Бенджамін Блум «Таксономія освітніх цілей»
- https://naurok.com.ua/

Ю.Ю. Кляп

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник ***О. Е. Васильєва,*** *д.т.н., професор кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА В ЖИВИХ ОРГАНІЗМАХ

Математика - це не тільки чітка система законів, теорем і задач, але й унікальний засіб спілкування, передачі інформації, пізнання краси. Математичні закономірності діють однаково ефективно у кристалах і живих організмах в атомі й у Всесвіті. Всі процеси в живих організмах при їх вивченні зараз майже обов’язково моделювати математично. Жива природа зробила безліч "винаходів", які люди зрозуміли і змогли повторити лише при відповідному рівні розвитку науки і техніки. Існує спеціальна наука - біоніка, яка вивчає "патенти природи". Виявляється, що їх можна іноді використовувати і в "людській" техніці.

У живих організмах "все навпаки": нервовій клітці (нейрону) природно і просто здійснювати операції з позитивними і негативними дійсними "числами", а для того щоб "вважати" навіть до двох , потрібна система з декількох нейронів - примітивний "мозок". Труднощі в з'ясуванні питання про те, як насправді відбувається вирішення тієї чи іншої задачі, пов'язані з тим, що заглянути в " керуючий центр" -в мозок - дуже важко. У цьому сенсі мозок поки що багато в чому "чорний ящик": можна бачити, яке завдання йому запропонована, можна бачити, який він видає результат, - а ось що відбувається всередині, про це відомостей ще дуже і дуже мало. Тим більше цікава і важлива робота, яка дозволила майже безпосередньо побачити, як іде робота мозкових нейронів при вирішенні деяких завдань.

Велику роль у самій математиці і її застосуванні відіграє зворотний процес перекладу геометричної інформації на мову чисел. Тому використання її в біології розпочалось найраніше. Дані операції використовуються у багатьох задачах та обчисленні даних природних об'єктів чи іншої біологічної структури. Тому є певна методика у виконанні біологічної задачі у різних аспектах арифметики.

«Очі і логарифми». Зорові рецептори, так само, як і інші - слухові, температурні і т. д., отримують сигнали із зовнішнього світу; вони повинні передати зорову інформацію в мозок точно і своєчасно. Передача сигналів від ока до мозку здійснюється нейронами "порогового" типу - аналоговий спосіб виявляється непридатним при передачі сигналів на досить великі відстані. А у порогових нейронів, як уже говорилося, всі імпульси абсолютно однакові, і відомості про величину вхідного сигналу ці нейрони передають змінюючи частоту імпульсації. Отже, лінійна залежність між вхідними та вихідними сигналами в разі очі виявляється недоцільною. І дійсно, в природі в цьому випадку використовується інша функція, досить складна.

В лінійній залежності рівним приращенням аргументу відповідають рівні приросту функції, або, що те ж саме, лінійна залежність переводить арифметичну прогресію значень аргументу в арифметичну ж прогресію значень функції. Коли ми маємо справу з функцією у = ах, то рівним приросту аргументу відповідає рівномірний відносний приріст функції. Наприклад, при постійних умовах проживання і необмежених ресурсах так зростає чисельність будь-якої популяції: число особин за кожний рік збільшується на 10%, тобто в 1,1. Ця властивість зорових рецепторів, що виробилося в ході еволюції, дозволяє оку працювати ефективно і економно, забезпечує можливість добре сприймати контраст. Цікаво, що описана залежність між зовнішнім сигналом (роздратуванням) і сигналом, сприйманим мозком (відчуттям),ким спочатку була виявлена? Зробив це французький вчений П. Бугер ще в XVIII столітті. На початку XIX століття німецький фізіолог і психолог Е. Вебер детально вивчив зв'язок між роздратуванням і відчуттям. Він з'ясовував, як потрібно змінити якийсь подразник, щоб людина помітила ці зміни. Виявилося, відношення зміни величини подразника до його первісного значення є величина постійна:

$$\frac{\Delta I}{I} = k,$$

де I - міра подразника, ΔI - приріст подразника, k - константа Вебера.

Константа Вебера залежить від того, який рецептор дратується. Наприклад, при сприйнятті ваги k = 1/30. Це означає, що, коли людина тримає вантаж у 100 г, вона помічає його зміну при збільшенні ваги на 3,4 г, а для вантажу в 200 г потрібно надбавка у 6,7 р. Для висоти звуку константа Вебера дорівнює 0,003, для гучності звуку - 0,09 і т. д. Виходячи з експериментів Вебера, інший німецький фізіолог і психолог Г. Фехнер сформулював знаменитий закон Вебера-Фехнера. Відчуття ростуть в арифметичній прогресії, коли роздратування зростає в геометричній прогресії. Цей закон був опублікований в книзі Фехнера "Елементи психофізики" в 1859 році. Там же було приведено і математичний вираз закону:

$$E = a \cdot \log I + b\ ,$$

де E - міра відчуття, a і b - константи, I - міра роздратування.

Висновки

Математика вносить в біологію дух пошуку, що присвячений поглибленому вивченню вже наявних знань або ж вивченню поки ще незвіданих областей. До речі, у мечехвоста немає зіниці, і, значить, немає діафрагми. Втім, навіть врахування ефекту діафрагми не рятує ситуації, оскільки змінюється освітлення всього на 1-2 порядки. Отже, в живих організмах проходять процеси переробки, передачі інформації і використання її з метою управління. Еволюція поступово знаходить вдалі форми обробки інформації, і ці форми мають чимале схожість з математичними операціями. Такі хитрощі еволюції ми й назвали "математикою в живих організмах". Тому використання математичних технологій в біологічному процесі є досить важливим кроком у вирішенні певних біологічних проблем. Завдяки їх вирішенню досягається невидима сторона співробітництва між біологічною та математичною системами, які відкриваються новими гранями .

Література

1. Горкавий В.К. Математична статистика: навч. посібн./Горкавий В.К.,Ярова В.В.-К.:ВД «Професіонал» 2004 р.

2. Конфорович А. Г. Математика служить людині: для ст. шк. віку. - К.: Рад. шк., 1984.

3. Грушко М. П.,Миклуш С. І.,Хомюк П. Г.. Біометрія :Навч. посіб. для студ. вищих навч. закл.

Д. Г. Кухарська
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О. Е. Васильєва,*** *д. т. н., професор кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА ТА АРХІТЕКТУРА

Архітектура - найдавніша сфера людської діяльності. Головний сенс поняття архітектура полягає в тому, що це сукупність будівель та споруд різного призначення, це простір, створений людиною і необхідне для його життя та діяльності.

Архітектурні пам'ятки, що дійшли до нас з глибини століть, допомагають нам зрозуміти цілі, погляди, думки, традиції і звички, уявлення про красу, рівень знань людей, які колись жили на Землі. Вони повинні були створювати комфортні умови для різної діяльності людини. Зведені споруди повинні бути міцними, безпечними і довго служити людям. Але людині властиво ще й прагнення до краси, тому все, що вона робить, вона намагається зробити красивим.

Французький архітектор і теоретик архітектури Ле Корбюзьє сказав: «Математика - це велична споруда, створена уявленнями людини, для пізнання Всесвіту». Математика та архітектура дуже пов’язані між собою, і одне і інше – це культура, з архітектурою математика поєднана найбільше, вона являє собою невід’ємну її частину. Адже для того, щоб отримати гарну споруду, яка простоїть довгі роки, треба проводити точні розрахунки. А тут вже не обійтись без математики.

Починаючи з пірамід і закінчуючи складними конструкціями сучасного дизайну, архітектура і математика були нерозривно зв'язані. По суті, неможливо зрозуміти архітектурний дизайн, не розглядаючи математику позаду нього.

Використовуючи математику, ми можемо спробувати зрозуміти прояв архітектурного задуму далеко за межами простих вимірювань. За допомогою математики можуть бути пояснені такі аспекти, як пропорція і симетрія. Архітектори, поєднуючи математику і сучасні технології, можуть створювати інноваційні форми.

Культові будівлі у всьому світі були спроектовані завдяки математиці, яка може вважатися генієм архітектури. При складанні плану найчастіше вирішується геометрична задача про розбиття фігури на частини. Обов'язково використовується поняття масштабу. Він зображує план з точки зору математики, представляючийого у виглядітієїфігури, яку можна було б побачити, дивлячись на неїзверху з правого і лівого боку. Виконуються різні розрахунки для обчислення кількості необхідного матеріалу.

Жоден з видів мистецтв так тісно не пов'язаний з геометрією, як архітектура. Архітектурні твори живуть у простор, є його частиною, вписуючись в певні геометричні форми. Крім того, вони складаються з окремих деталей, кожна з яких також будується на базі певного геометричного тіла. Часто геометричні форми є комбінаціями різних геометричних тіл.

З точки зору математики в архітектурних спорудах всіх часів панує єдність числа і фігури. Звідси випливає висновок про необхідність застосування і вдосконалення математичних методів в архітектурній композиції, так як саме вони, як абстракція, дозволять об'єднати засоби гармонізації.

Добре знати математику потрібно навіть при виконанні порівняно нескладних креслень. Архітектори використовують в своїй роботі математичні формули, теореми та властивості геометричних фігур. Термін “золотий переріз” ввів Леонардо да Вінчі. Цей відомий художник, математик при зображенні людей використовував “золотий переріз”. Без нього не обійтись в мистецтві й архітектурі. Евклід розробив теорію відношень і пропорцій і використовував їх при побудові правильних п’яти- та десятикутників та при побудові правильних дванадцяти- і двадцятикутників. Цим користуються архітектори і дотепер. “Золотий переріз” називають також гармонічним або діленням в крайньому та середньому відношенні. Результат роботи архітектора повинен бути точним. Його перспективний рисунок повинен відповідати правилам геометрії, зокрема нарисної. В перспективному рисунку переходять від загальних рис до деталей. Степінь стилізації вибирають в залежності від масштабу зображуваного об’єкта. Отже, ні один архітектор не обійдеться без знання теми, масштаб, пропорція. Виразність рисунка, креслення можна досягти тільки добре розвинутим почуттям лінії її пропорційності, товщини і правильним розміщенням, рівновагою на рисунку площин і ліній, світла і тіні.

Симетрія - це врівноваженість, упорядкованість, краса, довершеність, доцільність. Будь-яка архітектурна споруда використовує симетрію. Симетрія застосовується в будівництві, техніці та повсякденному житті.

Починаючи з пірамід і закінчуючи складними конструкціями сучасного дизайну, архітектура і математика були нерозривно зв'язані. По суті, неможливо зрозуміти архітектурний дизайн, не розглядаючи математику позаду нього. Використовуючи математику, ми можемо спробувати зрозуміти прояв архітектурного задуму далеко за межами простих вимірювань. За допомогою математики можуть бути пояснені такі аспекти, як пропорція і симетрія. Архітектори, поєднуючи математику і сучасні технології, можуть створювати інноваційні форми.

Хоча всі ми знаємо, що архітектура не існувала б без використання математики, ми рідко замислюємося про складність і абстрактність математичних рівнянь, які грають визначальну роль в деяких з самих унікальних будівель світу.

Культові будівлі у всьому світі були спроектовані завдяки математиці, яка може вважатися генієм архітектури. Деякі відомі приклади таких будівель: Хмарочос Меріекс (TheGherkin) в Лондоні, Кубічні будинки (Kubuswoning) в Роттердаме, Собор Святого Сімейства (SagradaFamilia) в Барселоні і ПавільонEndesa (EndesaPavilion) в Барселоні.

Всі ці будівлі наводять на думку про геніальність математики.

Єгипетські піраміди:

Найміцнішими архітектурними спорудами дотепер вважаються єгипетські піраміди. Вони мають форму правильних чотирикутних пірамід. Саме ця геометрична форма забезпечує найбільшу стійкість за рахунок великої площі основи. Форма піраміди забезпечує зменшення маси по мірі збільшення висоти над землею.

Каркасна система:

Етапом розвитку архітектурних конструкцій стала каркасна система. Каркас ще очолював спорудження, брав на себе основні навантаження. У математиці та мистецтві дві величини утворюють золотий переріз, якщо співвідношення їх суми до більшої величини дорівнює співвідношенню більшої до меншої. Вперше запропоноване давньогрецьким математиком Евклідом

$$Ф=(a+b):a=a:b$$

Висновки

Математика, як жодна з інших наук, тісно пов’язана з архітектурою.

Вона допомагає додати міцності споруді, а також створити цілісне, гармонійне її сприйняття. Математика надихає архітекторів на створення нових, цікавих та неповторних форм.

Література

1. Степанов М. «Архітектура», 2003 р. – С.5-6.
2. Якушева Г. «Довідник школяра: математика», 1995 р.
3. Смолина Н. І. «Традиції симетрії в архітектурі». М., 1990.
4. Гликін Я. Д. «Методи архітектурної гармонії». – 1976.

І.В.Семенюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Е.Васильєва,*** *д. т. н., професор кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА В ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

Ніякої достовірності нема в науках там, де не можна застосувати ні однієї з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою.

Одним із потужних інструментів пізнання та використання законів війни в теорії та практиці військової справи є математика. Володіння математичними методами може забезпечити подальший глибокий розвиток військової справи і як об’єктивний інструмент аналізу дати можливість зрозуміти сутність процесів збройного протистояння, виявити його кількісні закономірності, і відповідно, знайти оптимальне тактичне рішення та варіанти бойових дій.

Математика дає можливість моделювати бойові дії, а отже, і розкривати принаймні основні зв'язки в процесах ведення збройної боротьби. Іншими словами, математика в поєднанні з ЕОМ дає можливість розкривати і встановлювати закономірності ведення збройної боротьби, застосовуючи електронні обчислювальні машини і будуючи різні моделі. Задаючи різні умови і вводячи різні вихідні дані, можна багаторазово (скільки необхідно) програвати різні ситуації, накопичувати статистичний матеріал, виявляти залежності і закономірності, визначати принципи ведення збройної боротьби.

Об'єктивність що виявляються закономірностей буде залежати від адекватності математичних моделей модельованим процесам збройної боротьби. Цілком зрозуміло, що такі моделі можуть бути створені досвідченими командирами-воєначальниками (офіцерами-операторами) в співдружності з математиками і інженерами. Моделювання бойових дій - прекрасний інструмент в руках воєначальників для прогнозування можливих результатів бойових дій, а отже, і для вироблення рекомендацій щодо їх планування та ведення. Якщо моделювання бойових дій - це універсальний метод, то інші математичні методи, що входять до загального математичний арсенал, дають широкі можливості вирішення приватних завдань при реалізації принципів військового мистецтва. За допомогою різних математичних методів і ЕОМ є можливість виробляти кількісні рекомендації для прийняття рішень в різних бойових ситуаціях.

Застосування різноманітних методів оптимізації бойових дій своїх військ якраз і складає сутність застосування математики у військовій справі. При цьому слід мати на увазі, що ці методи можуть і повинні застосовуватися як при розрахунках, що проводяться вручну, так і з використанням ЕОМ. Необхідно також мати на увазі, що в цій справі не може бути ніяких шаблонів і трафаретів. Процеси збройної боротьби розвиваються за притаманними їй законами. Задача математики - найбільш точно врахувати в цих процесах кількісні зміни, які при досягненні певного рівня приводять до якісних змін. Отже, математика і ЕОМ дають командирам усіх рангів можливість пов'язувати основні філософські категорії: кількість, міру і якість, і тим самим стають в руках командира найважливішим зброєю, покликаним допомагати йому домагатися успіху у вирішенні поставлених завдань.

Нині дослідження операцій-це комплексна математична дисципліна ,що займається розробкою і застосуванням методів прийняття оптимальних рішень на основі побудови і аналізу математичних моделей в різних сферах людської діяльності.

Після отримання концептуальної моделі задачі дослідження операцій, як правило, в термінах тієї галузі, в якій вона виникла , найперше ,що необхідно зробити – це перейти на мову математики . Такий перехід називають формалізацією задачі .Процедура формалізації задачі не є однозначною ,тому вдалий її вибір складає самостійну проблему. При її вирішенні потрібно знайти компроміс між двома, по суті , антагоністичними бажаннями : з одного боку якомога точніше відобразити реальне функціювання досліджуваної системи , а з іншого- побудувати достатньо просту математичну модель, що у кінцевому підсумку дозволить отримати досяжний результат .

Висновки

Отже, математика є невід’ємним чинником у веденні військових справ, без неї не можливо досягти точності розрахунків в діях. Тому без математики будь-які військові дії не будуть давати хорошого результату в подальшому розвитку подій.

Література

1. Литвин М. М. Методики оперативно-тактичних розрахунків: навч. посіб. / М. М. Литвин, А. Б. Мисик, І. С. Катеринчук. – Хмельницький : Вид-во НАДПСУ, 2004. – С. 82.

2.Абчук В. А. Справочник по исследованиюопераций / В. А. Абчук, Ф. А. Матвейчук, Л. П. Томашевский / подобщ. ред. Ф. А. Матвейчука – М. : Воениздат, 1979. – 368 с

3. Кузнецов Ю. Н. Математическоепрограммирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высшая школа, 1980. – 300 с.

І.А. Вигінний
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій,** кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ВИНАХОДИ НІКОЛИ ТЕСЛИ

Безліч винаходів Ніколи Тесли, яким зараз 90-100 років, все ще здаються нам фантастичними. Він передбачав свої винаходи, будучи ще підлітком.

Багато його винаходів і розвиток електроенергетичної системи в цілому, ймовірно, є насправді відтворенням системи передачі енергії по всій земній кулі. Вже на початку 1899 року Тесла передавав електромагнітне випромінювання крізь товщу землі і запалював блискавки на відстані п’яти миль.

Ніколі Тесла приписують стільки всіляких винаходів, що можна подумати, ніби він створив велику частину сучасної прикладної науки. Наведемо перелік його найбільших винаходів, на які Тесла дійсно отримав патенти.

1. Автоматичний човен.

У 1898 році Тесла отримав патент на автоматичний човен (№ 613 809), підводний човен, який приводився в дію електрикою. Цей підводний човен живився електроенергією, яку отримував за допомогою приймача. Енергія акумулювалась в батареях, і електричний підводний човен міг управлятися дистанційно. В автоматичного підводного човна є власний генератор, гвинтовий двигун та інші багаточисленні механізми. І всі ці механізми управляються дистанційно, без дротів, за допомогою електромагнітних коливань, наведених на контур, поміщений в човні, який реагує на ці коливання.

2. Електродинамічна індукційна лампа.

У 1894 році Тесла отримав патент на електродинамічну індукційну лампу. Електродинамічна індукційна лампа — це різновид лампи, яка, за його словами, має велику перевагу перед лампами, вживаними у той час.

3. Безлопатна турбіна Тесли.

У безлопатній турбіні (патент № 1 329 559 від 1916 р.) для руху рідини або газу через двигун використовується набір дисків, що обертаються. Безлопатні турбіни можуть використовуватися в швидкісних суднах на повітряній подушці або в простих насосах. Цей тип двигуна вважається найбільш ефективним, в 20 разів кращим, ніж звичайні турбіни, і його до сьогоднішнього дня не почали використовувати.

4. Фотоапарат для думок Тесли.

Це був, ймовірно, найфантастичніший винахід Тесли, пристрій для фотографій думок. Тесла якось в 1933 році, коли йому вже було 78 років, сказав: «Я хочу фотографувати думки… У 1893 році в ході деяких досліджень я отримав упевненість в тому, що певний образ, сформований в думках, може відображати дію і створювати якийсь образ на сітківці ока, яке я можу вважати відповідним апаратом. Це привело мене до ідеї телебачення, про яку я тоді оголосив. Моя ідея полягала в тому, що потрібно створити штучну сітківку, на якій відображуватиметься образ побаченого об'єкту, схожу на шахівницю, і оптичний нерв». Тесла на той час перестав відразу розкривати всі деталі свого винаходу. Ця цитата взята з інтерв'ю для газети у випуску, присвяченому безпровідним технологіям, 10 вересня 1933 року.

5. Телепортація і машина часу.

У популярних історіях про подорожі у часі, таких як експеримент «Філадельфія» або проект «Монтаук», цілком очевидно, що секретні дослідження переміщень в часі і телепортації запозичили дещо з робіт Тесли. Якщо Тесла дійсно геній (а багато хто вважає його генієм), він міг побудувати свою власну машину часу і подорожувати в майбутнє або, можливо, телепортуватися на Марс. А може, він побудував літаючу тарілку і відлетів, зімітувавши власну смерть.

6. Перший телеавтомат.

Патент на конструкцію вертикального апарату з вертикальним злетом і посадкою був отриманий 3 січня 1928 року. Це був останні запатентований винахід Тесли. Після нього вчений більше не подавав на здобуття патентів ні на один свій винахід.

Тесла був схожий на дивакуватого героя з минулого. Фактично це «людина, що випередила свій час».

Література:

1. Бегич Николас. Никола Тесла и его дьявольское оружие : Научно-популярное издание / Бегич, Николас, Мэннинг, Джин ; Пер. с англ. К.Козырева; Предисл. авт.; Худож. П.Волклв. - М. : Яуза : ЭКСМО, 2009. - 384 с.
2. Дереш Любко. Любко Дереш про Миколу Гоголя, Марка Твена, Ніколу Теслу, Альберта Енштейна, Стівена Кінга [Текст] : Оповідання / Дереш, Любко. - К. : Грані-Т, 2007. - 72 с.
3. http://ceprekrasno.com.ua/nevidomi-vynahody-nikoly-tesly.htm Невідомі винаходи Ніколи Тесли.

СЕКЦІЯ 3. Історія математики

Г. Бублик
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

Блез Паска́ль — французький філософ, письменник, фізик, математик. Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проективної геометрії, творець перших зразків лічильної техніки, автор основного закону гідростатики. Відомий також відкриттям формули біноміальних коефіцієнтів, винаходом гідравлічного преса й шприца та іншими відкриттями. Автор знаменитих «Думок» та «Листів до провінціала», які стали класикою французької літератури. На честь Паскаля названа одиниця вимірювання тиску (Паскаль), а також популярна мова програмування Pascal.

Паскаль народився 19 червня 1623 року в місті Клермон-Ферран (Овернь) в родині голови податкового. Блез ріс обдарованою дитиною. Його батько Етьєн самостійно займався освітою хлопчика; Етьєн сам непогано розбирався в математиці — дружив з Мерсенном і Дезаргом, відкрив і досліджував невідому раніше алгебричну криву, що відтоді отримала назву «равлик Паскаля», входив до комісії з визначення довготи, створеної Рішельє.

У січні 1640 року родина Паскалів переїхала до Руана. Блез, який розпочав своє навчання з раннього дитинства під керівництвом свого батька, продовжував опановувати різні наукові дисципліни. Батько Блеза за родом служби в Руані (посада інтенданта Нормандії) часто займався стомливими розрахунками, син також допомагав йому в розподілі податків і мит. Зіткнувшись з традиційними способами обчислень, Паскаль визнав їх незручними і задумав створити обчислювальний пристрій, який міг би допомогти спростити розрахунки. У 1642 році (у 19 років) Паскаль почав створення своєї Лічильної машини «паскаліни», в цьому, за його власним визнанням, йому допомогли знання, отримані в ранні роки. Машина Паскаля виглядала як скринька, наповнена численними, пов'язаними одна з одною зубчастою передачею, шестернями. Числа, які треба було додати або відняти, вводилися відповідним поворотом коліщат, принцип роботи ґрунтувався на рахунку обертів.

Кавалер де Мері, великий шанувальник азартних ігор, запропонував Паскалю в 1654 році розв'язати деякі задачі, що виникають за певних ігрових умов. Перше завдання де Мері — про кількість кидків двох гральних костей, після якого ймовірність виграшу перевищує ймовірність програшу, — була вирішена ним самим, Паскалем, Ферма і Робервалем. У ході розв'язання другої, набагато складнішої задачі, в листуванні Паскаля з Ферма, закладаються основи теорії імовірності.

Паскаль створює «Трактат про арифметичний трикутник» (виданий в 1665 році), де досліджує властивості «трикутника Паскаля» та його застосування в підрахунку числа сполук, не вдаючись до алгебраїчних формул. Трикутник Паскаля — це геометрично, на зразок трикутника, розміщені біноміальні коефіцієнти. Це математичне поняття названо на честь Блеза Паскаля. Ряди трикутника Паскаля умовно пронумеровані згори, починаючи з нульового, й числа в нижньому ряді відносно чисел у попередньому ряді завжди розміщені ступінчасто й навскіс. Побудувати цей трикутник просто. Кожне число в кожному ряді одержуємо, додавши два числа, розміщені вгорі (зліва і справа). Якщо зліва або справа немає числа, підставляємо нуль на його місце. Одним з додатків до трактату була робота «Про підсумовування числових степенів», де Паскаль пропонує метод підрахунку степенів чисел натурального ряду.

Ще одним з дослідженям був закон Паскаля (основне рівняння гідростатики) — тиск на рідину в стані теплової рівноваги передається в усіх напрямках однаково. На основі гідростатичного закону Паскаля працюють різноманітні гідравлічні пристрої: гальмівні системи, гідравлічні преси тощо. У законі Паскаля мова йде не про тиски в різних точках гідравлічної системи, а про збурення тиску в різних точках, тому закон справедливий і для рідини в полі сили тяжіння. У разі рухомої нестисливої рідини можна умовно говорити про справедливість закону Паскаля, бо додавання довільної сталої величини до тиску не змінює виду рівняння руху рідини (рівняння Ейлера або, якщо враховується дія в'язкості, рівняння Нав'є — Стокса), однак у цьому випадку термін закон Паскаля зазвичай не застосовується. Для стисливих рідин (газів) закон Паскаля, взагалі кажучи, несправедливий.

З 1658 року здоров'я Паскаля швидко погіршилось. За сучасними міркуваннями, протягом всього життя Паскаль страждав від комплексу захворювань: рак мозку, кишковий туберкульоз, ревматизм. Його гнітила фізична слабкість, переслідували жахливі головні болі. Восени 1661 року Паскаль поділився з герцогом де Роаном ідеєю створення дешевого і доступного всім способу пересування в багатомісних каретах. Герцог створив акціонерне товариство для реалізації цього проекту і 18 березня 1662 року в Парижі відкрився перший маршрут громадського транспорту, названого згодом омнібусом. 19 серпня 1662 року після тривалої хвороби Блез Паскаль помер. Поховали його в парафіяльній церкві Парижа Сен-Етьєн-дю-Мон.

Література:

1. Соломатин В.А. История науки. Уч. пос. – М.: ПЕРСЭ, 2002 – 352 с.

А.А.Чорнобай
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки.*

ІГРИ, ЯКІ ЗНАЄ ВЕСЬ СВІТ

Ша́хи — стратегічна гра на спеціальній дошці, що має назву шахівниця й поділена на 64 світлі та темні клітини поля, між 16 світлими (білими) і 16 темними (чорними) фігурами за встановленими для них правилами пересування. Для перемоги потрібно поставити мат супернику, заставити його здатися або ж якщо це гра на час, то у нього повинен закінчитись цей час аби визнати його таким, що програв. Існує поділ між частинами гри в шахи, а саме: деб’ют, мідшпіль і ендшпіль.

У цю гру грають мільйони людей у всьому світі. Шахи походять від стародавньої індійської гри чатуранґа, яка, крім того, є ймовірним предком східних стратегічних ігор: сянці, чангі і сьоґі. Шахи потрапили до Європи в 9 столітті, після завоювань Омейядів в Іспанії. Фігури набули своєї нинішньої сили в Іспанії наприкінці 15 століття; правила стандартизовано в 19 столітті.

Шахи, як одна з найпоширеніших спортивних ігор сучасності, поєднує в собі елементи мистецтва (уяви), науки (логічно-точний розрахунок) і спорту.

Перший загальновизнаний чемпіон світу з шахів, гросмейстер Вільгельм Стейніц, завоював свій титул в 1886 році.

ФІДЕ є членом *Міжнародного олімпійського комітету*, що можна розглядати як визнання шахів видом спорту.

Починаючи з другої половини 20-го століття, запрограмовані на гру в шахи комп'ютери, грають зі зростальним успіхом, за силою гри набагато обійшовши найсильніших гравців серед людей. Починаючи з 1990-х років, комп'ютерний аналіз робить значний внесок у теорію шахів, особливо в ендшпілі. Комп'ютер IBM Deep Blue став першою машиною, яка здолала чинного чемпіона світу з шахів у матчі, коли він переміг Гаррі Каспарова в 1997 році. Поява сильних шахових рушіїв, які працюють на портативних пристроях, призвела до все більшої заклопотаності, щодо «читерства» на турнірах.

Шахи мають виховне значення: сприяють розвитку концентрації уваги, вміння долати труднощі та планувати власні дії, логічно мислити. Оскільки у грі в шахи виявляються особливості людської особистості, їх використовують як модель для наукових досліджень у психології та педагогіці. Їх також використовують для моделювання систем штучного інтелекту.

Тетріс — відеогра-головоломка, розроблена *Олексієм Пажитновим* та його колегами. Перша версія гри була представлена **6 червня 1984 року**, коли він працював в *ОЦ Академії наук СРСР* в Москві. Назву гри автор створив поєднавши грецький префікс «тетра-» зі словом «теніс» — улюбленою грою Пажитнова.

Правила гри. Випадкові фігурки тетраміно падають зверху в прямокутну склянку шириною 10 і висотою 20 клітин. У польоті гравець може повертати фігурку та рухати її по горизонталі. Також можна «скидати» фігурку, тобто прискорювати її падіння, коли вже вирішено, куди фігурка повинна впасти. Фігурка летить, поки не наткнеться на іншу фігурку або на дно склянки. Якщо при цьому заповнився горизонтальний ряд з 10 кліток, він пропадає і все, що вище нього, опускається на одну клітку. У спеціальному полі гравець бачить фігурку, яка буде слідувати після поточної — ця підказка дозволяє планувати свої дії. Темп гри поступово збільшується. Гра закінчується, коли нова фігурка не може поміститися в стакан. Гравець отримує бали за кожну фігурку, тому його завдання — заповнювати ряди, не заповнюючи саму склянку якомога довше, щоб таким чином отримати якомога більше балів.

Нарахування балів. При нарахуванні балів за лінії кількість балів зазвичай залежить від того, скільки ліній прибрано за один раз. Наприклад, в китайських консолях «Brick Game», популярних в СНД в 1990-х роках, нарахування балів зазвичай було таким: 1 лінія — 100 балів, 2 лінії — 300 балів, 3 лінії — 700 балів, 4 лінії (тобто, зробити Тетріс) — 1500 балів. Тобто, чим більше ліній прибирається за один раз, тим більше відношення кількості балів до кількості ліній. Цікаво, що *тетрісом* в багатьох версіях гри також називається дія, після якого зникає одразу 4 лінії. Це можна зробити лише одним способом — скинути «палицю» (фігурку, в якій всі клітини розташовані на одній лінії) в «шахту» ширини 1 і глибини як мінімум 4.

Література:

1. «Композиции на шахматной доске», Н. Зелепукин, А. Молдсванский
2. «Шахматные окончание» Ю. Авербаха
3. Вікіпедія «Шахмати»
4. Вікіпедія «Тетріс»

А. Яцульчак
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ОГЮСТЕН ЛУЇ КОШІ

Огюстен Луї Коші – відомий французький математик. Огюстен Луї Коші був сином високопоставленого французького муніципального службовця. Під час Французької революції батько Коші втрачає роботу, і сім'я переїжджає в місто Аркей, де хлопчик і отримує початкову освіту.

Але, коли політична обстановка в країні стає спокійною, сім'я Коші повертається в Париж. Огюстена приймають в кращу в той час середню школу міста - Центральну школу Пантеону. За час навчання хлопчик одержує чимало нагород за успіхи у вивченні латинської мови і гуманітарних наук.

Після школи Коші вирішує здобувати фах інженера і здає вступні іспити на факультет, набравши при цьому середній бал. З Політехнічної школи він випускається в 1807 р. Потім він навчався в École des Ponts et Chaussées (Школа мостів і доріг), яку закінчує з дипломом цивільного інженера. Надалі Коші працює над будівельним проектом військового порту, але, не дивлячись на всю свою зайнятість, все ж знаходить час для підготовки наукових записок з математики. Свої замітки він представить перед Основним відділенням (фізичних і математичних наук) Інституту Франції. У листопаді 1815 р Коші береться за викладання математики другокурсникам в Політехнічній школі. А роком пізніше він вже стає професором школи. Починаючи з 1824 р публікуються значущі роботи Коші з математики. І в цей же період він отримує пропозиції викладати одночасно в Колеж де Франс і на Факультеті природничих наук Паризького університету.

У 1825 р Коші формулює «Теорію функцій комплексної змінної», яка вважається однією з ключових робіт в області математики. Роком пізніше Огюстен Луї Коші вводить чітке визначення «вирахування функції» та доводить теорему Тейлора і обчислює «залишковий член» теореми. У 1830 р, після масових заворушень в Парижі, Коші залишає батьківщину і подорожує по Швейцарії, Сардинії і Чехії. Згодом впродовж року Огюстен Луї Коші доводить «Інтегральну теорему Коші».

У 1838 р учений повертається в Париж. Він викладає в Середній духовній школі, займається підготовкою вчителів до викладацької роботи. Важливу роль Коші зіграв і в житті Католицького інституту. Помер Коші 23 травня 1857 р.

Роботи Коші належать до різних областей математики. Усього ж він написав і опублікував понад 800 робіт з арифметики і теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики. Його «Курс аналізу» (1821), «Резюме лекцій числення нескінченно малих» (1823), «Лекції з додатків аналізу до геометрії» (1826—1828). У них він дав означення поняття неперервності функції, чітко побудував теорії збіжних рядів, (зокрема, вперше установив точні умови збіжності рядів Тейлора до даної функції і провів виразну межу між збіжністю цього ряду взагалі і збіжністю до даної функції; ввів поняття радіуса збіжності, довів теорему про добуток двох абсолютно збіжних рядів), дав означення інтеграла як границі сум, довів існування інтегралів від неперервної функції.

Великою заслугою Коші є те, що він розвив основи теорії аналітичних функцій комплексної змінної закладені ще в 18 столітті Л. Ейлером і Ж. Д'Аламбером. Особливо велике значення мають такі результати, отримані Коші: геометричне представлення комплексної змінної як точки, яка переміщається в площині тим чи іншим шляхом інтегрування; вираження аналітичної функції у вигляді інтеграла (інтеграл Коші), та розклад функції в степеневий ряд; розробка теорії лишків і її застосування до різних питань аналізу.

В області теорії диференціальних рівнянь Коші належать: постановка однієї з найважливіших загальних задач теорії диференціальних рівнянь (задача Коші), основні теореми існування розв'язку для випадку дійсних і комплексних змінних (для останніх він розвинув метод мажорант) і метод інтегрування рівнянь з частинними похідними 1-го порядку (метод Коші — метод характеристичних смуг). У геометрії Коші узагальнив теорію багатогранників, дав новий спосіб дослідження поверхні 2-го порядку, досліджував дотичні, напрямні і квадратуру кривих, установив правила застосування аналізу до геометрії, а також рівняння площини і параметричне представлення прямої в просторі.

В алгебрі він інакше довів основну теорему теорії симетричних багаточленів, розвив теорію визначників, знайшовши всі головні їхні властивості, зокрема теорему. Цю теорему він поширив на матриці. Коші належать терміни «модуль» комплексного числа, «сполучені» комплексні числа. У теорії чисел Коші належать: доведення теореми Ферма про багатокутні числа, одне з доведень закону взаємності, а також дослідження з теорії цілих алгебраїчних чисел, у яких він отримав ряд результатів, пізніше в загальнішій формі встановлених німецьким математиком Г. Куммером.

Він перший вивчив загальне невизначене кубічне рівняння і дав теореми про невизначені квадратні рівняння і порівняння з однаковим модулем і загальним розв'язком. Коші належать також дослідження з тригонометрії, механіки, теорії пружності, оптики, астрономії.

Жоден математик - за винятком хіба що Леонарда Ейлера - не залишив після себе стільки наукових праць, як Огюстен Коші.

Література

1.Бобынин В. В., Огюстен Луи Коши. Очерк его жизни и деятельности, «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем», 1887, т. 3, № 1-3

С. Муха
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич,*** *к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики і механіки*

КАЛЬКУЛЯТОР ПАСКАЛЯ

Блез Паска́ль - один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проективної геометрії, творець перших зразків лічильної техніки, автор основного закону гідростатики. Відомий також відкриттям формули біноміальних коефіцієнтів, винаходом гідравлічного преса й шприца та іншими відкриттями. Автор знаменитих «Думок» та «Листів до провінціала», які стали класикою французької літератури.

Паскаль народився 19 червня 1623 року в місті Клермон-Ферран (Овернь) в родині голови податкового управління Етьєна Паскаля й Антуанетти Бегон, дочки сенешаля Оверні. У Паскалів було троє дітей — Блез і дві його сестри:

молодша — Жаклін і старша — Жильберта. Мати померла, коли Блезу було 3 роки. У 1631 році сім'я переїхала до Парижа.

Паскаль-батько дотримувався принципу, за яким складність предмета мала відповідати розумовим здібностям дитини. За його планом давні мови Блез мав вивчати з 12-ти, а математику з 15-16 - річного віку. Метод навчання полягав у поясненні загальних понять і правил та наступному переході до вивчення окремих питань. Так, знайомлячи восьмирічного хлопчика із законами граматики, спільними для всіх мов, батько мав на меті навчити його мислити раціонально. Удома постійно проводилися бесіди з питань математики і Блез надзвичайно цікавився цим предметом. Батько, який побоювався, що математика завадить синові вивчати латинську та грецьку мови, обіцяв звернутися до математики в майбутньому. Якось на чергове запитання сина про те, що таке геометрія, Етьєн коротко відповів, що це спосіб креслити правильні фігури і знаходити між ними пропорції, проте заборонив йому будь-які дослідження в цій сфері. Однак Блез на самоті заходився вугіллям креслити на підлозі різні фігури і вивчати їх. Не знаючи геометричних термінів, він називав лінію «паличкою», а коло «кільцем».

Блез Паскаль створив свій механічний калькулятор у віці 19 років у 1642 році, спостерігаючи за роботою свого батька, який працював збірником податків і був змушений часто виконувати довгі і обтяжливі розрахунки.

Приблизно за 10 років він побудував більше 50 моделей калькуляторів, в тому числі і вдосконалену модель механічного калькулятора. Демонстрація робочої моделі механічного калькулятора відбулася в 1645 році і здивувала середньовічну Європу красою і точністю своїх механізмів.

Машина Паскаля являла собою механічний пристрій у вигляді шухлядки з численними, пов'язаними один з одним зубчастою передачою шестернями. Числа вводилися в машину за допомогою відповідного повороту набірних коліщат. На кожне з цих коліщат, що відповідали одному десятковому розряду числа, були нанесені поділки від 0 до 9. При введенні числа, коліщатка прокручувалися до відповідної цифри. Зробивши повний оберт надлишок над цифрою 9 коліщатко переносило на сусідній розряд, зсуваючи сусіднє коліщатко на 1 позицію. Перші варіанти «Паскаліни» мали п'ять зубчастих коліс, пізніше їх кількість збільшилася до шести або навіть восьми, що дозволяло працювати з великими числами, аж до 9999999.

Відповідь з'являлася у верхній частині металевого корпусу. Обертання коліщат було можливе лише в одному напрямку, виключаючи можливість безпосереднього оперування від'ємними числами. Тим не менше, машина Паскаля дозволяла виконувати не лише додавання, але й інші операції, але вимагала при цьому застосування досить незручної процедури повторення складання. Віднімання виконувалось за допомогою доповнень до дев'ятки, які для допомоги користувачу з'являлися у віконці, розміщеному над виставленим оригінальним значенням.

Незважаючи на переваги автоматичних обчислень використання десяткової машини для фінансових розрахунків у рамках діючої в той час у Франції грошової системи було важким. Розрахунки велися в ліврах, су та деньє. У ліврі нараховувалося 20 су, в су — 12 деньє. Зрозуміло що використання десяткової системи ускладнювало і без того нелегкий процес обчислень.

Машина Паскаля стала другим реально працюючим обчислювальним пристроєм після рахівника Вільгельма Шікарда, створеного в 1623 році.

Т.О. Єфремова, І.В. Вигоднер
Херсонський національний технічний університет
*Науковий керівник **І.В. Вигоднер**, старший викладач кафедри вищої математики і математичного моделювання*

ПЕРШИЙ У СВІТІ ПРОГРАМІСТ – АДА АВГУСТА ЛАВЛЕЙС

У 1975 році міністерство оборони США прийняло рішення про початок розробки універсальної мови програмування, яка в 1980 році була названа "Ада", на честь Ади Августи Лавлейс, жінки, яка описала роботу обчислювальної машини та стала першим в світі програмістом.

Ада Августа Лавлейс (10 грудня 1815 р – 27 листопада 1852 р) – єдина законно народжена донька англійського поета лорда Джорджа Гордона Байрона і його дружини віконтеси Вентворт – Анни Ізабели Мілбенк. Батьки дівчинки розлучилися, коли Аді був лише рік. Доньку виховувала мати, яка була пристрасно захоплена математикою і адже мала прізвисько "королева паралелограмів". Цю свою пристрасть вона передала маленькій Аді, найнявши для домашньої освіти відомих англійських вчителів, які стали викладати їй алгебру, тригонометрію і астрономію.

Тяга до знань та працездатність дали можливість дівчині познайомитися з видатними особистостями тієї епохи: Майклом Фарадеєм, Девідом Брюстером, Чарльзом Вітстоном, Чарльзом Діккенсом та іншими. У її характері поєднувалися романтичні уявлення про світ і одночасно віра в силу знань. Вона писала з тією ж пристрастю про математичні обчислення, з якою її батько писав любовні балади.

В 1833 р Ада познайомилася з людиною, яка реалізувала її наукові амбіції. Це був Чарльз Беббідж (1791–1871), блискучий дослідник, винахідник, професор Кембриджського університету. В той час виконувався величезний за обсягом проект зі створення таблиць значень логарифмів та тригонометричних функцій, і Беббідж мріяв про те, щоб автоматизувати цю роботу. Він задумав з'єднати ідею механічної арифметичної машини Готфріда Лейбніца з ідеєю програмного управління й створити аналітичну машину — прообраз сучасного комп'ютера. Вже два десятиліття вчений працював над проектом аналітичної обчислювальної машини, яка включала б в собі функції арифметичної пам'яті, управління, введення і виведення інформації. Машина не була завершена через відсутність грошей в уряді. Беббідж описав свою машину, яка змогла б виконувати обчислення з точністю до двадцятого знаку після коми. Ада дуже захопилася винаходкою Чарльза.

На початку 40-х років Беббідж напружено працював над вдосконаленням структури своєї аналітичної машини. Її архітектура вже наближено відповідала сучасним ЕОМ. У ній були присутні всі три класичних складових комп'ютера: управляючий пристрій, сховище (тепер ми називаємо це пам'яттю) та арифметичний пристрій . Арифметичний пристрій мав апаратну підтримку всіх чотирьох дій арифметики. Основна програма заносилася на барабан (керуючий пристрій), на додаток до неї могли використовуватися перфокарти. Беббідж пропонував створити механізм для перфорування цифрових результатів на металевих пластинках. Для зберігання інформації в пам'яті вчений збирався використовувати не тільки перфокарти, а й металеві диски, які будуть повертатися на осі. Металеві пластинки і металеві диски можуть тепер розглядатися нами як далекі прототипи магнітних карт і магнітних дисків.

У 1842 р Чарльз Беббідж був запрошений в Туринський університет зробити лекцію про свою аналітичну машину. Він попросив графиню Лавлейс перевести лекцію на англійську та супроводити текст коментарями. Леді Лавлейс витратила більше року на цю роботу, після чого записи були опубліковані. Вони вміщували 52 сторінки коментарів, в яких йшлося про розробку плану операцій для аналітичної машини – це і було перше програмування. Її "операції" наділяли обчислювальну машину неймовірною здатністю працювати з алгебраїчними формулами, вона побачила в цій машині більший потенціал, ніж сам Беббідж. Ада Августа представила три перші в світі обчислювальні програми, складені нею для машини: програма для вирішення двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими, при описі якої перша застосувала поняття "робочих комірок" (робочих змінних). Друга програма була складена для обчислення значень тригонометричної функції з багатократним повторенням заданої послідовності обчислювальних операцій. Для цієї програми Ада ввела поняття "цикл" – поняття однієї з фундаментальних конструкцій структурного програмування. В третій програмі, призначеній для обрахування чисел Бернуллі, вона використала рекурентні вкладені цикли.[2]

Цей оригінальний коментар, включаючи комплекс розробок програмного забезпечення для обчислювальної машини, який жінка робила на протязі року та доклала до перекладу, виявився набагато ширше і глибше самого винаходу англійського вченого. Лавлейс не тільки удосконалила його шлях роздумів, а ще й зробила величезний крок у передбаченні класифікації послуг, які могла б здійснювати така обчислювальна машина. Вона писала, що можливості обчислювальних машин в майбутньому будуть поширюватися на такі функції, як логічні висновки та міркування, організація фундаментальних досліджень у галузі науки, мистецтва, музиці. Вчена висловила думку, що машина замінить людину в різних інформаційних процесах, пов'язаних з управлінням та контролем.

Незважаючи на те, що машина Беббіджа так і не була сконструйована за життя Ади, ця видатна жінка, яка заглянула на роки вперед, заслужено вважається першим в світі програмістом.

Література

1. Айзексон В. Інноватори: Як група хакерів, геніїв та ґіків здійснила цифрову революцію / В. Айзексон — Київ : Наш Формат, 2017. — 488 с.
2. https://www.imena.ua/blog/11-ada-lovelace/

О.Т.Бойко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник ***М.І.Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ЛЕОНАРД ЕЙЛЕР – НАЙВИДАТНІШИЙ МАТЕМАТИК 18-ГО СТОЛІТТЯ

Леонард Ейлер народився 15 квітня 1707 р. в м Базель, в Швейцарії. Незабаром після народження сина, родина переїжджає в містечко Рієн. У тринадцять років Ейлер-молодший вступає до Базельського університету, і в 1723 р. отримує ступінь магістра філософії. У своїй дисертації Ейлер порівнює філософії Ньютона і Декарта. Йоганн Бернуллі, який давав хлопчикові по суботах приватні уроки, швидко розпізнає видатні здібності хлопчика до математики і переконує його залишити ранню теологію і зосередитися на математиці. 17 травня 1727 р. Ейлер приходить на службу до медичного відділення Імператорської російської академії наук в Санкт – Петербурзі, але майже відразу ж переходить на математичний факультет. Однак через заворушення в Росії, 19 червня 1741 р Ейлер переводиться в Берлінську академію. Там учений прослужив близько 25 років, написавши за цей час понад 380 наукових статей. У 1755 р. його обирають іноземним членом Шведської королівської академії наук.

Дивовижним у діяльності Ейлера було те, що він зовсім не замикався в математиці. Учений чудово знав кращих письменників стародавнього світу, стародавню літературу з математики, історію всіх часів і народів, мови стародавні та східні, Західної Європи, ботаніку, хімію, фізику, анатомію і медицину. Своїми знаннями вражав спеціалістів із цих галузей знань. Він міг, наприклад, прочитати напам'ять всю «Енеїду» і навіть назвати перші й останні рядки поеми на кожній сторінці того видання, яким користувався. Вчений з насолодою слухав музику і написав трактат з математичної теорії музики.

Особисте життя Ейлера було тяжким. У нього померла дружина і він одружився вдруге. З тринадцяти дітей вісім померло в ранньому дитинстві. У 1771 р. під час пожежі згорів його будинок і майже все майно. Ледве встигли вивести з палаючого будинку сліпого вченого і врятувати велику кількість рукописів. Йому прооперували око і частково повернули зір. Щоб не трапилося ускладнень, лікарі заборонили працювати. Зрозуміло, що цього Ейлер виконати не міг. Тому, поновивши сили, продовжував працювати. Його енергія не вичерпувалась і в 70 і 75 років.

Масштаби доробку вченого вражають. Понад 886 наукових праць, серед яких більш як 20 великих 2-, 3-томних монографій. В епістолярній спадщині налічується близько 3 000 листів, більшість з яких є невеликими закінченими науковими повідомленнями.

Про величезну і постійну працездатність Ейлера свідчать не тільки опубліковані ним праці, а й розв'язані задачі, які пропонувались Паризькою академією наук. За успішне розв'язання їх він одержував премії з 1738 по 1772 рік, всього 12 раз, у 1752 р. — одержав подвійну премію. Ейлер був членом багатьох іноземних академій і наукових товариств. Паризька академія наук, статутом якої передбачено штат тільки із 40 академіків, враховуючи виключні заслуги Ейлера перед наукою, обрала його в травні 1755 р. «понад штат» своїм іноземним членом.

Ейлер розвинув кілька нових математичних дисциплін, які до нього перебували лише в зародковій формі: теорію звичайних диференціальних рівнянь і в частинних похідних, варіаційне числення, елементарну теорію функцій комплексної змінної; розкладанню функцій у тригонометричні ряди, теорії спеціальних функцій і визначених інтегралів, диференціальній геометрії поверхонь.

У зв'язку з розвитком картографії вчений розробив теорію кривизни поверхонь, теорію розгортуваних поверхонь і конформних перетворень.

У навчальних посібниках і наукових працях вченого є багато задач з елементарної математики, доступних учням середньої школи. Деякі з них поклали початок новим розділам математики, наприклад: теорії графів, топології та іншим. Багато математичних понять елементарної математики названо ім'ям геніального вченого.

Ейлеру належать чудові і надзвичайно сучасні слова: «Немає науки, яка б не була пов'язана з математикою, науки, яка, якщо вона має бути грунтовно розробленою, не вимагала б застосування вищої математики». Кращим підтвердженням цих слів є сама творчість Ейлера. Фізика, механіка, астрономія, оптика, гідротехніка, картографія, теорія механізмів і машин, аеронавтика, балістика, архітектура, фізіологія і теорія музики — ось далеко неповний перелік галузей знань, у яких працював Ейлер.

Література:

1. А. Л. Воєвода Зацікавити математикою: (методичні матеріали для підвищення інтересу до математики): Методичний посібник. – 2-ге вид., допов. і перероб. – Вінниця:,ФОП «Легкун В.М.», 2012. – 181с.
2. Ігор Макаров. Інвестиції в «чистую науку» // *Санкт-Петербургский университет* : журнал. — 7 березня 2006. — № 4 (3726).

Н.В. Єпанчинцева
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І.Кусій,** кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

АЛГОРИТМ ГАУСА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ДАТИ ВЕЛИКОДНЯ

Великдень (Воскресіння Христове, Пасха) – найдавніше християнське свято, головне свято богослужебного року, що встановлено на честь Воскресіння Ісуса Христа. Воскресіння Христове – це перехід від смерті до життя, звільнення нас від тягаря гріхів, перехід людини з рабства гріхів та зла до свободи любові та добра. Традиціями цього свята є Великоднє привітання, освячення Великоднього кошика, відвідування родичів. Дата свята не є сталою і кожного року обчислюється за місячно-сонячним календарем.

325р.в місті Нікея (нині Ізник, Туреччина) відбувся Перший Вселенський Собор. На ньому було прийнято:

•прийняти на"вічні часи" в основу християнського літочислення юліанський календар;
•церква не переходить на Новий стиль;
•прийнятий Нікейський символ віри;
•свято Пасхи святкувати в першу неділю після повного місяця, яка настає після повного місяця, що настає після весняного рівнодення.

Алгоритм Гауса обчислення дати Великодня - математичний алгоритм, призначений для визначення дня святкування Великодня в будь-якому році. Запропоновано вперше німецьким математиком Карлом Гаусом в1800р.
Гаус навів лише формули без пояснень. Пояснення кожного кроку алгоритму дав професор Базельського університету Герман Кінгелін в1870р.

Алгоритм Гауса для обчислення дати Великодня:

1.Розділити номер року на 19 і визначити залишок від ділення a.
2.Розділити номер року на 4 і визначити залишок від ділення b.
3.Розділити номер року на 7 і визначити залишок від ділення c.
4.Розділити суму (19a+15) на 30 і визначити залишок d.
5.Розділити суму (2b+4c+6d+6) на 7 і визначити залишок e.
6.Визначити суму f = d+e.
7.До 04.04 (4квітня) додати f.

Наведемо приклади обчислення дати Великодня на цей і на наступний роки.

N=2020	N=2021
a = [N/19]=6	a=[N/19]=7
b= [N/4]=0	b=[N/4]=1
c= [N/7]=4	c=[N/7]=5
d=[(19a+15)/30]=9	d=[(19a+15)/30]=28
e = [(2b+4c+6d+6)/7]=6	e=[(2b+4c+6d+6)/7]=0
f = d+e=15	f=d+e=28
4.04+f=4.04+15=19 квітня	4.04+f=4.04+28=2 травня

Література:

1. С. Куліков. Нитка часів.«Наука»,1991
2. Про старий та новий стилі//«В світі інформатики» № 114(«Інформатика» № 20/2008).
3. Кінкелін Г.Обчислення християнського Великодня //Математичний збірник Московського математичного товариства. М.,1870.Т.5.С.73-92.

Т. Гавриленко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВІДОМІ УКРАЇНСЬКІ МАТЕМАТИКИ

М. В. Остроградському (1801-1861) належить одне з найпочесніших місць в історії світової математичної науки. Діапазон наукової творчості Остроградського надзвичайно широкий: диференціальне та інтегральне числення, алгебра, теорія чисел, диференціальна геометрія, теорія ймовірностей, математична фізика, варіаційне числення, аналітична механіка, теорія удару, балістика.

Г. Ф. Вороний (1868-1908) належить до когорти найвідоміших українських математиків минулого. Визнаний фахівцями як один із найяскравіших талантів у галузі теорії чисел на межі XIX-XX століть. Г.Ф. Вороний за своє життя встиг надрукувати всього дванадцять статей. Але яких! Вони дали поштовх для розвитку кількох нових напрямків в аналітичній теорії чисел, алгебраїчній теорії чисел, геометрії чисел, які нині активно розвиваються у багатьох країнах.

М. П. Кравчук (1892-1942) - автор понад 180 робіт, в тому числі 10 книг із різних розділів математики (алгебра і теорія чисел, теорія функцій дійсної і комплексної змінних, теорія диференціальних та інтегральних рівнянь, теорія ймовірностей і математична статистика, історія математики тощо.) Ці наукові праці увійшли до скарбниці світової науки. Тепер існують на сторінках наукових досліджень многочлени Кравчука, моменти Кравчука, осцилятори Кравчука.

В. Й. Левицький (1872-1956) - основоположник математичної культури нашого народу", - так сказав про Володимира Левицького академік Михайло Кравчук. Великою заслугою В. Левицького було те, що він зібрав і впорядкував матеріали з української математичної термінології, що була надрукована в 1903 р. Основною ділянкою наукової роботи професора В. Левицького була теорія аналітичних функцій. Він займався також геометрією, алгеброю, диференціальними рівняннями та історією математики. Багато уваги приділяв теоретичній фізиці та астрономії.

М. О. Зарицький (1889-1961): наукові інтереси М. О. Зарицького охоплюють, головним чином, теорію множин з алгеброю логіки та теорію функцій дійсної змінної. Він досліджує похідні множини методами алгебри логіки, виходячи тільки з кількох основних аксіом і не користуючись іншими геометричними міркуваннями. Крім того, М. О. Зарицький займався теорією вимірних перетворень множин, тобто таких гомеоморфних перетворень, які переводять довільну вимірну множину в іншу множину такого ж роду. А також він займався деякими теоретико-числовими питаннями.

В. М. Глушков (1932-1982): творчий зліт В.М. Глушкова вражає своєю нестримністю. Діапазон його захоплень був надзвичайно широкий: філософія, математика, фізика, література, ботаніка. Він вивчав окремі дисципліни в обсязі вузівських курсів. Розв'язав п'яту узагальнену проблему Гільберта, одну з найскладніших в сучасній алгебрі. Важливі результати дістав в теорії цифрових автоматів, в галузі застосувань обчислювальної техніки в керівництві виробничими процесами та економіці. Під його керівництвом були створені універсальні електронно-обчислювальні машини "Київ", "Дніпро", серії машин „Мир" та інші ЕОМ.

Ю. Л. Далецький (1926-1997) – всесвітньо відомий математик, гордість вітчизняної науки. Основні праці вченого присвячені дослідженню сучасних проблем математичного аналізу, теорії ймовірностей, теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики. До скарбниці світової літератури з математики і теоретичної фізики увійшла важлива формула Далецького-Троттера про мультиплікативне представлення еволюційного інтеграла.

Ю. О. Митропольський (1917-2008) – за роки своєї майже 60-річної наукової діяльності Ю.О. Митропольський отримав фундаментальні наукові результати в галузі асимптотичних методів нелінійної механіки, якісного аналізу нелінійних систем диференціальних рівнянь при збуреннях, дослідженні коливних процесів у нелінійних системах.

А. В. Скороход (1930-2011): відомий український математик, що працював у сфері теорії стохастичних диференціальних рівнянь, граничних теорем для випадкових процесів, розподілів у нескінченновимірних просторах, статистики випадкових процесів, марковських процесів.

А. М. Самойленко (нар. в 1938р.) є одним із провідних фахівців з якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь і теорії нелінійних коливань. Він провів оригінальні й глибокі дослідження та побудував теорію збурення інваріантних тороїдальних багатовидів динамічних систем, створив нові та розвинув відомі асимптотичні методи нелінійної механіки, розробив теорію багаточастотних коливань.

Література:

1. Математика України [Електронний ресурс]. - Електрон. дані. - Режим доступу: http://www.refine.org.ua/pageid-2962-2.html. - Загол. з титул. екрану. - Мова: укр.

Ю. Дубас
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ЗМІНИЛИ СВІТ

Розвиток математики ніколи не перестає дивувати своїми відкриттями. Прості формули і розрахунки, можуть змінити світ. Сучасне суспільство, на жаль, здебільшого сприймає математику просто як шкільний предмет, не замислюючись над тим, що це велика серйозна наука, певна особлива мова, інструмент, який дає змогу моделювати різноманітні процеси практично в усіх сферах життя. Математика скрізь. І кожен може знайти "свою" математику. Адже, навіть письменник Льюїс Керолл, який написав «Аліса в країні чудес», був математиком, Наполеон Бонапарт писав математичні праці.

Проста українська дівчина Марина В'язовська, розв'язала задачу століть, за що і здобула премію SASTRA Ramanujan Prize-2017 розміром в 10 тисяч доларів. Оргкомітет пояснив присудження премії В'язовській тим, що її розробки матимуть серйозний вплив у майбутньому на дискретну геометрію, аналітичну теорію чисел та гармонійний аналіз. У 2016 року В'язовська розв'язала задачу пакування куль у 8-вимірному просторі та, у співавторстві, — в 24-вимірному. Раніше задачу пакування куль було розв'язано лише для просторів із трьома і менше вимірами, а розв'язання тривимірного випадку (гіпотези Кеплера) було викладене на 300 сторінках тексту з використанням 50 000 рядків програмного коду. Натомість розв'язання В'язовської 8-вимірного випадку займає лише 23 сторінки та є «приголомшуюче простим». На дослідження цієї задачі В'язовську надихнув київський математик Андрій Бондаренко. Над розв'язанням вона працювала два роки у Берліні. У квітні 2017 року Математичним інститутом Клея Марині В'язовській присуджено Дослідницьку нагороду за проривну роботу над задачами пакування куль у розмірностях вісім та двадцять чотири.
З давніших і більш відомих відкриттів можна згадати « Трикутник Рело». Трикутник Рело обмежує негладка замкнута опукла крива, яка носить таку ж назву. Вона походить від прізвища німецького механіка Франца Рело, який першим продемонстрував сталість ширини цієї фігури і використовував її у своїх механізмах.

Але крім вирішення важких задач, математика також допомагає в звичайних побутових речах. Тому Аристотель, Бекон, Леонардо да Вінчі та багато інших великих розумів людства займалися питанням взаємозв'язку математики і філософії. З математичних документів, які дійшли до нас, можна зробити висновок, що навіть в Древньому Єгипті були сильно розвинуті галузі математики, пов'язані з рішенням економічних задач. Папірус Райнда (бл. 2000 р. до н.е.) починався з обіцянки навчити "зробленому й обґрунтованому дослідженню всіх речей, розумінню їхніх сутностей, пізнанню всіх таємниць". В своїй книзі він розповідає про те, що не кожен може полюбити математику, але будь-хто здатен її зрозуміти. Також автор розповів про своє відкриття з першою роботою з Акшаєм Венкатешем, його давнім співавтором. До цього його робота була дуже технічною. В деякому сенсі вона була представлена теоремами, які він міг довести, оскільки знав багато передових методів і вмів їх застосовувати. У проекті з Акшаєм він вперше зрозумів, що маючи гарну ідею, ми можемо досягти успіху у старій проблемі з використанням елементарних методів – вони довели те, що можна було довести 50 років тому, але ніхто про це не подумав. Це дійсно змінює стосунки з предметом – усвідомлення того, що ще є багато хороших ідей, які «просто лежать на поверхні», але їх ще ніхто не сформулював. Завдяки таким людям, як ці автори і з’являються неймовірні відкриття, які змінюють світ.

Ще одним математичним генієм вважається Джордж Данціг. Будучи аспірантом університету, одного разу він спізнився на заняття і прийняв написані на дошці рівняння за домашнє завдання. Воно здалося йому складніше звичайного, але через кілька днів він зміг його виконати. Виявилося, що він вирішив дві «нерозв'язані» проблеми в статистиці, над якими билися багато вчених. Зараз його вважають «батьком лінійного програмування» (поряд з радянським математиком Л. В. Канторовичем).

Також існує англійський математик Абрахам де Муавр, відомий переважно через формулу Муавра, працями на теми нормального розподілу та теорії ймовірностей. Цікаво, що в літньому віці, він одного разу виявив, що тривалість його сну зростає на 15 хвилин в день. Склавши арифметичну прогресію, він визначив дату, коли вона досягла б 24 годин - 27 листопада 1754 року. У цей день він і помер.

Що стосується геометрії, то довгий час вважалося, що Рейнхард розрахував всі можливі формули і більше таких п'ятикутників не існує, але в 1968 році математик Р.Б.Кершнер (RB Kershner) знайшов ще три, а Річард Джеймс (Richard James) в 1975 році довів їх число до дев'яти. У тому ж році 50-річна американська домогосподарка і любителька математики Марджорі Райс (Marjorie Rice) розробила власний метод нотації і протягом декількох років відкрила ще чотири п'ятикутника. Нарешті, в 1985 році Рольф Штайн довів число фігур до чотирнадцяти.

Але одним з найпростіших і в той же час одним з найгеніальніших вважають Яна Відмана, який здобув популярність тим, що першим вжив і опублікував сучасні знаки плюса і мінуса. Дехто думає, що математикою повинні займатися тільки науковці. Однак ця наука потрібна всім нам. Адже, коли ви купуєте щось у магазині, робите ремонт у квартирі або слухаєте прогноз погоди, то, насправді, використовуєте основи і великі відкриття цієї особливої науки.

Література:

1. Кононенко О.Ю. Актуальні проблеми сталого розвитку: навчально - методичний посібник / О.Ю. Кононенко. –К.: ДП «Прінт сервіс», 2016. – 109 с.

Д. Лесюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

З ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ

Основою основ науково-технічного прогресу є дальший розвиток науки, зокрема математики, прикладне значення якої дуже велике. А всебічний розвиток будь-якої науки неможливий без глибокого аналізу її історії. До минулого звертаються з різних причин. Лейбніц, наприклад, застерігав, що хто хоче обмежитися сучасним без знання минулого, той ніколи не зрозуміє сучасного.

Історія математики має особливу привабливість. Задачі й теореми, доведені сотні і тисячі років тому, захоплюють нас своєю красою, витонченістю логічних міркувань так само, як захоплювали всі попередні покоління. Перегортаючи сторінки минулого науки, ми переконуємося, що найбільші поклади математичних ідей, понять, задач, які потім об'єднувались у теорії, містяться у практичній діяльності людини. Вони відлиті в сучасні форми теоретичною думкою вчених різних епох і народів. Водночас пошуки розв'язків багатьох математичних задач не раз приводили вчених до відкриття нових математичних фактів.

Математика — одна з найдревніших наук. Перші математичні уявлення і поняття людина формувала в глибокій давнині, розв'язуючи найпростіші задачі практичного характеру. Ускладнювалися форми трудової діяльності, і перед людиною поставали складніші задачі, для розв'язування яких вона формувала нові математичні поняття, створювала математичні теорії.

Отже, математика розвивалася під впливом двох головних стимулів: потреб практичної діяльності людини і логіки розвитку самої математики. За періодизацією видатного математика А. М. Колмогорова математика пройшла чотири основні періоди розвитку:

1. Зародження математики — від глибокої давнини до VI—V ст. до н. е., тобто до того часу, коли математика стає самостійною галуззю теоретичного знання зі своїм власним предметом і методом.

2. Елементарна математика — від VI—V ст. до н. е. до кінця XVI ст. У цей час формувалися основні теорії, що стосуються математики сталих величин. У надрах математики сталих величин зароджувалися і розвивалися ідеї, які на кінець XVI ст. привели до створення передумов відкриття аналітичної геометрії та аналізу нескінченно малих — двох основних дисциплін класичної вищої математики. Вони вивчають вже не стани, а закономірності змінних величин.

3. Створення математики змінних величин — кінець XVI — середина XIX ст. На початку цього періоду французький учений Р. Декарт створює аналітичну геометрію, а англійський учений І. Ньютоні німецький учений Г. Лейбніц —

аналіз нескінченно малих. За невеликий проміжок часу до середини XIX ст. у математиці склалися майже всі математичні теорії, які нині називають класичними основами сучасної вищої математики.

4. Сучасна математика характеризується швидким зростанням об'єму просторових форм і кількісних відношень. У зв'язку з цим розширилася сфера застосування математики, виникло багато нових математичних теорій, які привели до створення електронних обчислювальних машин. Останні стали потужним знаряддям дослідження глибинних закономірностей природи і розв'язування найскладніших задач у різних галузях практичної діяльності людини.

Перший період історії математики безіменний, хоча математику завжди творили люди. Саме завдяки героїчним зусиллям тисяч і тисяч першопрохідців математичного пошуку зароджувалися і формувалися найпростіші математичні уявлення і поняття. Але імена перших математиків загубилися.

У кожний період історії науки видатні математики є першовідкривачами невідомих раніше теорем, розв'язків задач, за якими часто відкривалися нові горизонти науки. У вчених були різні долі. Одні зажили слави і безсмертя ще за життя, іншим судилося пройти складні шляхи, поділити трагічну долю цілих народів, які ставали жертвами кривавих воєн і політичних переворотів.

Багато визначних математиків стали зразками беззавітної відданості науці, патріотами свого народу.А. Ейнштейнписав, що «...моральні якості видатних людей мають, можливо, більше значення для даного покоління і всього ходу історії, ніж чисто інтелектуальні досягнення. Останні залежать від величі характеру значно більшою мірою, ніж прийнято вважати».

Література:

1. О.І. Бородін Історія розвитку поняття про число і системи числення. / Бородін О.І.– Київ: Радянська школа, 1978. – 102 с.
2. М.І. Кованцов Математична хрестоматія: Алгебра і початки аналізу. / Кованцов М.І. – Київ: Радянська школа, 1977. – 215 с.
3. А.Г. Конфорович Математика служить людині. / Конфорович А.Г. – Київ: Радянська школа, 1984. – 192 с.
4. М.П. Маланюк Стежинки до коренів істини. / Маланюк М.П., Возняк Г.М. – Тернопіль: Збруч, 1993. – 58 с.
5. В.А. Соломатин. История науки./ В.А. Соломатин Уч. пос. – М.: ПЕРСЭ, 2002 – 352 с.

СЕКЦІЯ 4. Математика і сучасність

А.Р. Свирид, В.С. Фідря
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник ***О.С. Б.І. Сокіл,*** *доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інженерної механіки (озброєння та техніки інженерних військ)*

ВПЛИВ КОЛИВАНЬ ПІДРЕСОРЕНОЇ ЧАСТИНИ КОЛІСНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ НА ЇХ ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Розглядається питання впливу пружно-демпфуючих характеристик системи підресорювання спеціальної колісної техніки на такі експлуатаційні характеристики як плавність ходу, стійкість руху вздовж криволінійних ділянок шляху, перевантаження на водія під час руху вздовж шляху із нерівностями чи пересіченою місцевістю. Для цього використано відносно не складнуфізичну модель транспортного засобу. Особливістю її є те, що вона, хоча враховує тільки вертикальні коливання підресореної частини, проте для неї пружні характеристики амортизаторів описуються нелінійними співвідношеннями деформації. У звязку із вказаним, математична модель вказаних коливань – нелінійне диференціальне рівняння другого порядку. Для зручності побудови і аналізу розв’язку вказане рівняння записано відносно системи відліку із початком у положені статичної рівноваги підресореноїмаси. У вказаному випадку дифренціальне рівняння незбуреного руху є однорідним, а від так для описання залежності частоти (періоду) власних коливань від амплітуди отримано у замкнутому вигляді аналітичну залежність.

Щодо самої амплітуди незбуреного руху, то вона визначаєтья початковими умовами. Крім цього, для використання отриманих результатів для широкого спектру колісної техніки, за базові параметри, які описують систему підвіски вибрано такі характерні для колісних автомобілів параметри як статична деформація підресореної частинита параметр, який вказує на відхилення пружних властивостей системи підресорення від лінійного закону. Тому у граничному випадку із отриманих результатів отримуються класичні співвідношення, які стосуються вертикльних коливань підресореної частини за лінійно-пружних характеристик системи підресорення.

Що стосується збуреного руху (впливу нерівностей шляху чи пересіченої місцевості), розлянуто найпростіший випадок: рух автомобіля зі сталою за величиною швидкості та сінусоїдальноїформи нерівностей. Показано, що:

- за більших значень величин статичної деформації пружних амортизаторів амплітуда виходу із наступної нерівності є дещо більшою;
- за більших величин швидкостей руху вздовж шляху із нерівностями амплітуда вертикальних коливань є меншою;
- критичне значення швидкості стійкого руху залежить від амплітуди коливань.

А.Т. Сомик
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник ***Х.І. Ліщинська****, к.т.н., доцент кафедри*
інженерної механіки (озброєння та техніки інженерних військ)

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

У військовій справі часто зустрічаються задачі, які називають задачами розподілу. Це насамперед задачі розподілу засобів підсилення, транспортні задачі, задачі вибору оптимального поєднання різноманітних бойових засобів, побудови якнайкращої оборони, вибору оптимальної системи озброєння тощо. У таких задачах потрібно виконати певні операції за обмеженої кількості ресурсів, проте достатньої для їх виконання. Деякі операції можна виконувати різними способами, але не всі операції будуть здійснені найкращим способом через відсутність ресурсів. Остання умова і створює труднощі у вирішенні задач. Як наслідок потрібно вибрати такий розподіл ресурсів, при якому буде досягнута найбільша сумарна ефективність.

Математичне формулювання задач розподілу полягає в наступному: потрібно знайти такий розподіл ресурсів x_j, $j = \overline{1, n}$, при якому критерій $K = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ досягає максимуму і виконуються обмеження по ресурсах $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ $(i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n})$, а також умова невід'ємності величин $x_j \ge 0$.

Якщо всі коефіцієнти a дорівнюють одиниці, то така задача є транспортною задачею. Задача про оптимальне прикріплення складів до бойових підрозділів і частин також зводиться до транспортної задачі. Математичне формулювання цієї задачі: є m складів – пунктів відправлення (ПВ) $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в кожному з яких сконцентровані запаси якихось однорідних вантажів у кількості відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ одиниць, n бойових частин – пунктів призначення (ПП) $B_1, B_2, \ldots, B_m$, які подавали заявки відповідно на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць вантажу. Сума всіх заявок дорівнює сумі всіх запасів: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Відомі витрати на перевезення c_{ij} одиниці вантажу з кожного ПВ A_i до кожного ПП B_j. Під витратами в залежності від умов можна розуміти витрати часу, транспортних засобів або ж вартість.

Потрібно скласти такий оптимальний план перевезення (звідки, куди і скільки одиниць везти), щоб всі заявки були виконані, а загальна вартість усіх перевезень була мінімальною. Позначимо x_{ij} – кількість одиниць вантажу, який відправляють з i-го ПВ A_i в j-ий ПП B_j. Сукупність чисел x_{ij} називатимемо «планом перевезень», а самі числа x_{ij} – «перевезеннями». Вони повинні задовольняти наступним умовам: - сумарна кількість вантажу, який доставляється з кожного ПВ у всі ПП, має бути рівною запасу вантажу в даному пункті: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = \overline{1, m}$; - сумарна кількість вантажу, який доставляється в кожен ПП з усіх ПВ, повинна бути рівна заявці, яка подана даним ПП: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$. $j = \overline{1, n}$; - сумарна вартість усіх перевезень $K = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i$ повинна бути мінімальною. Це задача лінійного програмування з відповідними умовами і мінімізуючою лінійною функцією K.

Всі операції щодо знаходженню розв'язку задачі – оптимального плану – зводяться до певних маніпуляцій безпосередньо з таблицею, де в деякому порядку записані умови транспортної задачі: список ПВ і ПП, заявки і запаси, а також в правому верхньому куті кожної клітинки вартість перевезень c_{ij}. По мірі заповнення цієї таблиці в її клітинках проставляють самі перевезення x_{ij}.

На початковому етапі для знаходження розв'язку складають опорний план, в якому відмінні від нуля не більше, ніж $m+n-1$ базисних перевезень. Для цього використовують метод північно-західного кута або метод мінімального елемента. Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють за допомогою циклу. *Симплекс-метод* визначає правила переходу від однієї таблиці перевезень до іншої.

У роботі розв'язана задача про забезпечення 5 артилерійських частин боєприпасами, які зберігаються на 4 складах. Визначено, з якого складу якій частини необхідно подавати боєприпаси таким чином, щоб загальний шлях, який проходить транспорт, був мінімальним. Задача розв'язана аналітично, а також за допомогою програм Excel та Mathcad.

У табл. 1 вказаний шлях від кожного складу до кожної частини, необхідність в боєприпасах і наявність їх на складах, а також оптимальний план.

Табл. 1. Оптимальний план задачі

ПП ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	К-ть боє-припасів у ПВ
A_1	130 0	70 400	140 0	70 0	50 2600	3000
A_2	110 0	80 2300	120 1000	60 1500	80 0	4800
A_3	60 1800	100 0	100 200	80 0	110 0	2000
A_4	140 0	80 0	100 3000	100 0	150 0	3000
Необхідність у боєприпасах	1800	2700	4200	1500	2600	12800

Література

1. Дякон В.М., Ковальов Л.Є. Математичне програмування: Навч. посібник. – К.: Вид-во Європейського ун-ту, 2007. – 497 с.

2. Лавров Є.А., Перхун Л.П., Шендрик В.В. Математичні методи дослідження операцій: підручник. – Суми: Сумський держ. ун-ет, 2017. – 212 с.

О.Д. Сташевський, В.М. Юдін
Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного
*Науковий керівник **Т.Я Глова.**, к.ф.-м.н*

ДОСЛІДЖЕННЯ ВОГНЕСТІЙКОСТІ БОЄПРИПАСІВ ПРИ ЇХ ЗБЕРІГАННІ

Виникнення пожеж на складах для зберігання боєприпасів та вибухових речовин є досить актуальною проблематикою для сьогодення. На складах боєприпасів ЗСУ на даний час склалася ситуація, яку можна визначити як критичну і найнебезпечнішу. Про це свідчать події, які виникли неодноразово за короткий проміжок часу. Прикладами таких масштабних катастроф є бази під Новобогданівкою, Цвітохою, Лозовою та Балаклією. Основним фактором виникнення та швидке поширення таких пожеж на складах для зберігання боєприпасів є неправильне зберігання, а також неякісна вогнестійка обробка дерев'яної тари. Ліквідація пожежі на складах для зберігання боєприпасів, без масштабних наслідків, можлива лише у перші хвилини. Тому для запобігання таких наслідків виникає необхідність провести дослідження впливу вогнестійкої обробки на температурне поле по товщині стінки дерев'яної тари, в якій зберігаються боєприпаси.

Одним з найбільш поширених матеріалів для виготовлення тари є деревина та її модифікації, які за групою горючості відносяться до групи матеріалів середньої займистості. Так, як вільний доступ кисню сприяє деструкції деревини і прискоренню процесу горіння, то для запобігання цього процесу обробляють тару вогнезахисним покриттям. Вогнезахисна обробка тари дозволяє надати деревині здатності протистояти дії полум'я та поширення його поверхнею. В залежності від ефективності оброблення стінок тари, вогнезахищена деревина може класифікуватись як важкозаймиста або важкогорюча. Під дією теплового потоку вироби з деревини можуть займатися (при температурі близькій до 230 $^{\circ}C$ відбувається займання деревини сосни, а при значенні температури 420 $^{\circ}C$ – самозаймання). У працях [1,2,3] досліджується можливість вогнезахисту дерев'яної тари для зберігання боєприпасів за допомогою просочувальної суміші ДСА – 2 та вогнезахисних покриттів "Фенікс – ДП" і "Фенікс – ДБ". Але у зазначених працях не досліджено зміну інтенсивності теплового потоку в залежності від різниці температур факела полум'я пожежі і тари, а також не вказано, як впливає ступінь чорноти покриття стінок тари на тепловий потік в залежності від віддалі до пожежі. У роботі [4] відзначено, що гексоген $\left(C_3H_6N_6O_6\right)$ - вторинна вибухова речовина, що входить до складу найбільш небезпечних боєприпасів має температуру спалаху 230 $^{\circ}C$, а тротил $\left(C_7H_5N_3O_6\right)$ температуру спалаху – 290 $^{\circ}C$. Тому враховуючи фізико-хімічні характеристики та температуру плавлення гексогену 204,1 $^{\circ}C$, критична температура для боєприпасів складає 190-200 $^{\circ}C$.

При дослідженні теплообміну випромінювання між факелом полум'я пожежі та стінкою тари потрібно визначити кількість енергії випромінювання факела, яка поглинається стінками тари. Для цього використаємо закон Стефана-Больцмана [5]

$$q_c = 5{,}67 \cdot \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] \cdot \varepsilon_{1-2} \cdot \psi_{1-2}, \qquad (1)$$

де $\varepsilon_{1-2} = \dfrac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}$ – зведений ступінь чорноти системи “полум’я-тара”; ε_1 – ступінь чорноти поверхні стінки тари; ε_2 – ступінь чорноти факела полум’я; ψ_{1-2} – кутовий коефіцієнт випромінювання; T_1 – температура поверхні тари, K; T_2 – температура факела, K.

Для дослідження інтенсивності теплового потоку, потрібно визначити кутовий коефіцієнт випромінювання.

Якщо ширина факела дорівнює c, ширина дерев’яної тари b, а віддаль між ними h, то кутовий коефіцієнт випромінювання визначається наступним чином

$$\psi_{1-2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{c}{h}} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{b+c}{h}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(\frac{b-c}{h}\right)^2 + 4} \right) \tag{2}$$

Враховуючи всі фактори та фізичні параметри тари і факела полум’я проведені дослідження, які дають можливість визначити безпечну відстань тари до полум'я пожежі в залежності від інтенсивності теплового потоку та чорноти поверхні тари, а також запропонована методика дослідження величини теплового потоку полум’я пожежі, який поглинається тарою.

Література

1. Цапко Ю. В. Дослідження умов займання деревини в залежності від параметрів нагрівання / Ю. В. Цапко, С. В. Жартовський // Пожежна безпека: Зб. наук. праць. – Львів: ЛДУБЖД, 2007. – Вип. 10. – С. 144-149.
2. Цапко Ю. В. Дослідження процесів теплопровідності вогнезахищеної дерев’яної тари для зберігання озброєння та боєприпасів / Ю. В. Цапко, В. М. Жартовський, М. Є. Карташов // Пожежна безпека: Зб. наук. праць. – Львів: ЛДУБЖД, 2009. – Вип. 14. – С. 97-104.
3. Цапко Ю. В. Визначення параметрів вогнезахисту дерев’яної тари для зберігання елементів озброєння військової техніки / Ю. В. Цапко, Є. В. Нікітін, Ю. П. Мосейчук // Науковий вісник УкрНДІПБ, 2010. – №1(21). – С. 103-107.
4. Савченко О. В. Обґрунтування використання гелеутворюючих систем для запобігання надзвичайних ситуацій на складах зберігання артилерійських боєприпасів / О. В. Савченко, Є. І. Стецюк, О. О. Островерх, Г. В. Іванець // Збірка наукових праць, Випуск 22, 2015. – С. 106–112.
5. Зигель Р. Теплообмен излучением / Р. Зигель, Дж. Хоуелл. – М.: Мир, 1975. – 936 с.

М. Купріков
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.Ф. Стасюк**, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ

Асиметричними криптосистемами, що базуються на еліптичних кривих над скінченими полями, займається розділ криптографії, що називається еліптичним криптуванням.

Більшість продуктів і стандартів криптографії з відкритим ключем базується на RSA. Однак, у зв'язку з розвитком методів криптоаналізу і обчислювальної техніки у RSA з'явився конкурент – еліптична криптографія.

Хоча еліптичні криві досліджувались більш як сотні років, інтерес до них виявляли тільки вузькі спеціалісти з теорії чисел та алгебраїчної геометрії. Проте в 1986 році одночасно і незалежно один від одного американські математики Н. Кобліц та В.Міллер запропонували використати еліптичні криві для побудови криптосистем з відкритим ключем.

Визначення 1. Еліптичною кривою E над полем F називається сукупність точок, координати яких справджують кубічне рівняння

$$y^2 + a_{11}xy + a_{01}y = x^3 + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00}, \qquad (1)$$

де $a_{ij} \in F, \quad i, j = \overline{0,1}.$

Визначення 2. Еліптична крива E називається *сингулярною*, якщо на E існує хоча б одна *особлива точка*, тобто точка, в якій виконуються умови:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

В іншому випадку крива E називається *несингулярною.*

Несингулярні еліптичні криві є гладкими, тобто не мають точок звороту і само перетинів, і в довільній їх точці можна провести дотичну. Саме ці еліптичні криві використовують в криптографії.

Найчастіше в криптографії використовують еліптичну криву у формі Вейєрштрасса

$$y^2 = x^3 + ax + b. \qquad (3)$$

Розглянемо кубічне рівняння, яке породжено еліптичною кривою (3),

$$x^3 + ax + b = 0 \qquad (4)$$

і його дискримінант

$$D = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2. \qquad (5)$$

Тоді

- якщо $D < 0$, то рівняння (4) має три різні дійсні корені α, β, γ. Типовий графік еліптичної кривої (3) в цьому випадку – це крива, яка складається з двох частин (Рис.1);
- якщо $D = 0$, то в цьому випадку рівняння (4) має два дійсні корені α, β, β, два з яких однакові. Тоді точка $(\beta; 0)$ – особлива, а крива (3) – сингулярна (Рис.2);

- якщо $D > 0,$ то алгебраїчне рівняння (4) має один дійсний корінь і два комплексно спряжені. Графік еліптичної кривої (3) в цьому випадку зображений на Рис.3.

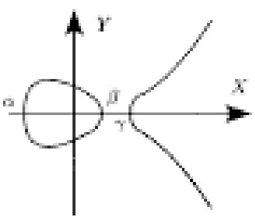


Рис. 1 D<0

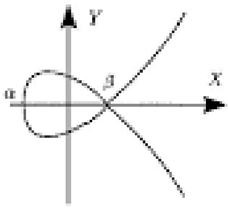


Рис. 2 D=0

D>0

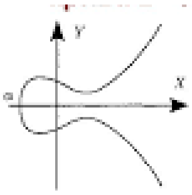


Рис. 3 D>0

Отже, еліптична крива (3), яку можна розглядати над довільним полем, є несингулярною за умови $D \neq 0.$ Тому умовою несингулярності еліптичної кривої (3) над скінченим полем характеристики p є умова

$$4a^3 + 27b^2 \neq 0\left(\operatorname{mod} p^n\right). \qquad (6)$$

Симетрія кривої (3) відносно осі Ox дає наглядне визначення точки, що обернена до заданої точки еліптичної кривої.

Визначення 3. Оберненою до точки $P(x;y)$ несингулярної еліптичної кривої вважається точка $-P(x;-y)$.

Важливими властивостями несингулярних еліптичних кривих є наступні:

- довільна пряма, яка проходить через дві різні точки еліптичної кривої перетинає цю криву в єдиній точці;
- дотична до еліптичної кривої в довільній точці, окрім точки перегину, перетинає цю криву ще в одній точці.

Ці властивості несингулярної еліптичної кривої дозволяють задати на ній операцію, яка називається операцією додавання точок кривої, і яка описується наступним визначенням.

Визначення 4. Сумою двох точок P і Q еліптичної кривої називається точка $R = P + Q,$ яка є оберненою до третьої точки перетину еліптичної кривої і прямої, що проходить через точки P і Q (Рис.4).

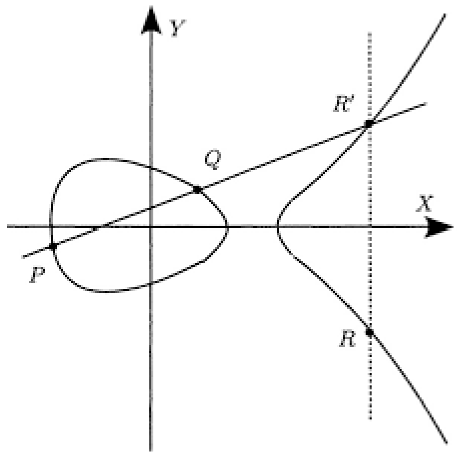


Рис.4

Якщо ж точки P і Q співпадають, тобто $P = Q,$ то операція додавання $P + P = 2P = R$ – рівносильна подвоєнню точки $P,$ тобто $R = 2P$ (Рис.5).

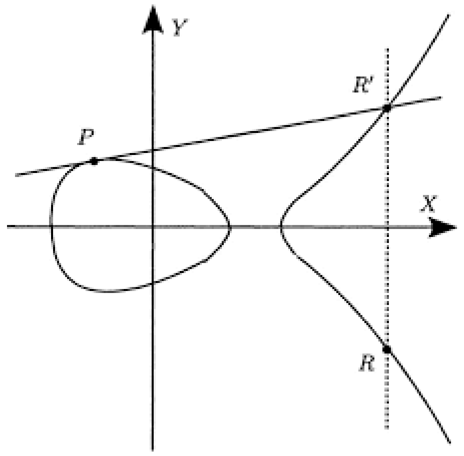


Рис.5

Зауважимо.що у випадку $P = Q$ січна PQ стає дотичною до кривої в точці P і, таким чином, геометрично подвоєна точка $2P$ – це точка обернена до точки перетину цієї дотичної з кривою.

Запишемо [1,2] координати точки $R = P + Q = (x_3; y_3)$ через координати доданків $P(x_1; y_1)$ і $Q(x_2; y_2)$:

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, \qquad \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$
$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1,$$

Аналогічно запишемо координати подвійної точки $R(x_3; y_3) = 2P(x_1; y_1).$

$$x_3 = \lambda^2 - 2x_1, \qquad \lambda = \frac{3x_1 + a}{2y_1}.$$
$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1,$$

Щоб побудувати групу точок еліптичної кривої, нам знадобиться ще нейтральний (нульовий) елемент цієї групи $O(x; \infty),$ для якого приймемо

$$P + (-P) = O$$

для довільної точки еліптичної кривої $P.$ Введення нейтрального елемента виправдовують такі міркування. Пряма, що проходить через точки P і $-P$

перпендикулярно до осі абсцис повинна мати третю точку перетину цього перпендикуляра з еліптичною кривою. Тому можна прийняти, що ця третя точка йде до нескінченості вздовж осі ординат. Таку точку вважають точкою еліптичної кривої, називають *нескінченно віддаленою точкою* і позначають $O(x;\infty)$.

Видатний французький математик А.Пуанкаре довів, що множина точок еліптичної кривої разом з нескінченно віддаленою точкою $O(x;\infty)$ утворює комутативну групу відносно операції додавання точок.

Оскільки ми розглядаємо еліптичні криві над скінченими полями, то дамо наступне

Визначення 5. Групою точок еліптичної кривої над скінченим полем $GF(p)$ називається множина точок, координати яких належать цьому полю і справджують конгруенцію $y^2 = x^3 + ax^2 + b(\mathrm{mod}\, p)$, якщо $p \neq 2,3$, $a,b \in GF(p)$, а для дискримінанта (5) виконується умова несингулярності (6). До групи точок еліптичної кривої належить нескінченно віддалена точка $O(x;\infty)$.

Група точок еліптичної кривої $y^2 = x^3 + ax^2 + b(\mathrm{mod}\, p)$ позначається $E_p(a,b)$.

Приклад еліптичної кривої над скінченим полем.

Нехай $GF(p) = GF(17)$ і $E_{17}(a,b) = E_{17}(3,5)$: $y^2 \equiv x^3 + 3x + 5(mod 17)$.

Можна переконатись, що точками цієї еліптичної кривої є 23 точки:
$(1,3),(1,14),(2,6),(2,11),(4,8),(4,9),(5,3),(5,14),(6,1),(6,16),(9,8),(9,9),(10,7)(10,10),$
$(11,3),(11,14),(12,1),(12,16),(15,5),(15,12),(16,1),(16,16),O.$

Зауважимо, що дискримінант D цієї кривої дорівнює $1^3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} > 0.$

Отже еліптична крива – несингулярна і над полем дійсних чисел зображається, як на рис.3.

Література

5. М.В.Захарченко Асиметричні методи шифрування в телекомунікаціях. Навчальний посібник / М.В.Захарченко, О.В. Онацький, Л.Г.Йова, Т.М. Шинкарук. – Одеса: 2011. – 184 с.
6. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии / Коблиц И.. – Москва.: Наука, Изд-во ТВП, 2001. – 260 с.

Янковий Павло
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.Ф. Стасюк**, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬ В ЕЛІПТИЧНІЙ КРИПТОГРАФІЇ

Для використання еліптичних кривих над скінченими полями в еліптичній криптографії потрібно знати їх основні властивості, на яких базуються відповідні алгоритми. Опишемо ці властивості.

1. *Відшукання точок еліптичної кривої над скінченим полем*

Шукати точки еліптичної кривої $y^2 = x^3 + ax^2 + b$ над скінченим полем $GF(p)$ пропонуємо за такою схемою:

- знайти всі квадратичні лишки за модулем p і квадрати для них;
- обчислити $x^3 + ax^2 + b$ для кожного $x \in GF(p)$;
- якщо для деякого конкретного значення $x \in GL(p)$ $x^3 + ax^2 + b = A$ виявиться квадратичним лишком, то розв'язати квадратне рівняння $y^2 = A$ і отримати дві точки еліптичної кривої $\left(x; \sqrt{A}\right)$ і $\left(x; p - \sqrt{A}\right)$;
- якщо ж при деякому $x \in GL(p)$ $x^3 + ax^2 + b = A$ виявиться квадратичним нелишком, то точок з такою абсцисою на еліптичній кривій немає.
- якщо для деякого $x \in GL(p)$ $x^3 + ax^2 + b = 0$, то такій абсцисі відповідає одна точка $(x; 0)$.

Приклад 1. Знайти всі точки еліптичної кривої $y^2 = x^3 + 3x + 5$ для $p = 17$.

- знайдемо квадратичні лишки: $1, 2, 4, 8, 13, 15, 16$
  і квадрати: $2 = 6^2,\ 8 = 5^2,\ 13 = 8^2,\ 15 = 7^2.$
- використовуючи запропоновані рекомендації, знайдемо точки еліптичної кривої:

$$(1,3),(1,14),(2,6),(2,11),(4,8),(4,9),(5,3),(5,14),(6,1),(6,16),(9,8),(9,9),(10,7)(10,10),$$
$$(11,3),(11,14),(12,1),(12,16),(15,5),(15,12),(16,1),(16,16),O.(x;\infty)$$

2. *Число елементів групи точок еліптичної кривої*

Визначення 1. Число елементів групи точок еліптичної кривої $E_p(a,b)$ над полем $GL(p)$ називається *порядком цієї групи і позначається* N_E.

Межі порядку групи точок еліптичної кривої над полем $GL(q)$, де $q = p^n$, визначаються теоремою Хассе.

Теорема Хассе. Порядок N_E групи точок еліптичної кривої над скінченим полем $GL(q)$, $q = p^n$ визначений нерівнісю

$$q + 1 - 2\sqrt{q} \le N_E \le q + 1 + 2\sqrt{q}. \qquad (1)$$

З нерівності (1) випливає, що число точок еліптичної кривої перевищує загальне число елементів поля на величину меншого порядку, ніж $O\left(\sqrt{q}\right)$.

У випадку простого скінченого поля $GL(p)$ для порядку N_E еліптичної кривої $y^2 = x^3 + ax^2 + b$ є точна формула на мові символу Лежандра для квадратичних лишків $[2]$

$$N_E = p + 1 + \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{f(x)}{p} \right), \qquad (2)$$

де $\left(\frac{f(x)}{p} \right)$ – символ Лежандра, тобто $\left(\frac{f(x)}{p} \right) = \pm 1$ в залежності від того,чи є $f(x)$ квадратичним лишком, чи нелишком за модулем p.

Приклад 2. Переконатись, використовуючи формулу(2), що число точок N_E еліптичної кривої $y^2 = x^3 + x + 4$ над полем $GL(23)$ дорівнює 29.

3. Порядок точки еліптичної кривої

Визначення 2. Порядком точки $P \in E_p$ називається *найменше натуральне число* n, *для якого* $nP = O$.

Якщо точка $P(x; y)$ еліптичної кривої над скінченим полем має порядок n, то справедливі наступні твердження:

- множина $\{O, P < 2P, ..., (n-1)P\}$ утворює циклічну підгрупу в $E_p(a,b)$;
- порядок довільної точки еліптичної кривої є дільником числа точок еліптичної кривої N_E;
- якщо $n = N_E$, то точка порядку n є твірним елементом групи E_p;
- при належному виборі параметрів a і b можна добитись того, щоб число точок еліптичної кривої було простим числом, і тоді кожна точка еліптичної кривої, окрім точки O, є твірним елементом групи E_p.

Приклад 3. Знайти порядок точки $P(1;3)$ еліптичної кривої $E_7(2,6)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки $2P$ за формулами подвоєння $[1,2]$. Маємо

$$\lambda = \frac{3 \cdot 1 + 2}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6} = 30 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7), \quad x_3 = 4 - 2 = 2, \quad y_3 = 2(1-2) - 3 = -5 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Отже координати точки $2P = (2;2)$. Знайдемо координати точки $4P$ за формулами подвоєння. Маємо

$$\lambda = \frac{3 \cdot 4 + 2}{4} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7), \quad x_3 = -4 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7), \quad y_3 = -2 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Аналогічно знайдемо координати точки $8P$. Маємо

$$\lambda = \frac{3 \cdot 9 + 2}{10} = \frac{8}{3} = \frac{8 \cdot 5}{3 \cdot 5} = 40 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7), \quad x_3 = 25 - 6 = 19 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7),$$

$$y_3 = 5(3-5) - 5 = -15 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Знайдемо координати точки $3P = 2P + P = (2;2) + (1;3)$ за формулами додавання точок $[1,2]$. Маємо

$$\lambda = \frac{1}{-1} = -1 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7), \quad x_3 = 36 - 3 = 33 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7), \quad y_3 = 6(2-5) - 2 = -20 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Знайдемо $11P = 8P + 3P = (5;6) + (5;1) = (5;6) + (5;-6)$. Оскільки ці точки лежать на вертикальній прямій $x = 5$ симетрично відносно осі абсцис, то їх сума дорівнює нескінченно віддаленій точці $O(x;\infty)$. Отже $11P = O$ і порядок точки $P(1;3)$ в групі точок еліптичної кривої $E_7(2,6)$ дорівнює 11.

4. Дискретне логарифмування на еліптичній кривій

Операція множення на еліптичній кривій – це аналог операції піднесення до степеня в скінченому полі. Тому в еліптичній криптографії в ролі прямої задачі маємо задачу скалярного множення точок кривої, тобто обчислення $Q = mP$ для відомих m і P. Обернена задача за традицією називається дискретним логарифмуванням на еліптичній кривій і полягає у відшуканні для заданих точок P і Q кривої такого числа m, що $Q = mP$. Стійкість шифрування на еліптичних кривих визначається складністю розв’язання задачі дискретного логарифмування на групі точок цих кривих.

5. Вибір еліптичної кривої і базової точки

Зазвичай, в еліптичній криптографії використовують еліптичні криві над простим полем і полем характеристики 2.

Генерація еліптичної кривої здійснюється за наступними кроками:

- вибір характеристики поля Галуа;
- вибір коефіцієнтів еліптичної кривої;
- обчислення порядку N_E групи точок кривої;
- вибір базової точки $G(x;y)$ кривої;
- визначення порядку базової точки кривої.

Одна з гарантій того, що вибрана точка $G(x;y)$еліптичної кривої згенерує групу точок
еліптичної кривої – це такий вибір кривої і поля, для яких кількість точок N_E кривої є просте число. В цьому випадку довільна точка еліптичної кривої буде твірним елементом групи точок цієї кривої.

Федеральні стандарти обробки інформації $(FIPS)$ рекомендують 10 скінчених полів, де p має довжину 192, 224, 256, 384, 521 біт і поля $GF(2^m)$, де m має довжину 163, 233, 409, 571 біт. Наприклад, одна з цих кривих

$y^2 = x^3 + 3176890812513255034763174764138276932727469559 27\,x +$
$+7905289660787875871812057 20257.$

Література

7. М.В.Захарченко Асиметричні методи шифрування в телекомунікаціях. Навчальний посібник / М.В.Захарченко, О.В. Онацький, Л.Г.Йова, Т.М. Шинкарук. – Одеса: 2011. – 184 с.
8. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии / Коблиц И.. – Москва.: Наука, Изд-во ТВП, 2001. – 260 с.

М. Бойко
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

РОЛЬ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ У ФОРМУВАННІ СФЕРИ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Як відомо [1] цивільний захист - це захист населення, території, навколишнього середовища та природного середовища від виникнення надзвичайних ситуацій та їх ліквідація. Під цивільною обороною розглядають галузь науки, яка вивчає теоретичні, науково-технічні, економічні, екологічні проблеми, які викликають порушення нормальних умов життя та діяльності людей на окремій території, внаслідок аварій, катастроф, стихійного лиха або небезпечного випадку, що призвели або можуть призвести до неможливості проживання населення на зазначеній території або об'єкті, проведення там господарчої діяльності, загибелі людей або до значних матеріальних збитків.

Розглянемо роль вищої математики як галузі науки у житті людини, а саме у функціонуванні сфери цивільного захисту. Як відомо, ви́ща матема́тика входить в навчальний план технічних та деяких інших спеціальних навчальних закладів, включає в себе розділи аналітичної геометрії, елементи лінійної алгебри, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння тощо. Метою курсу вищої математики є ознайомлення з основними методами вищої математики, необхідних для розв'язування теоретичних та практичних задач фізики і механіки, виробити навички математичного дослідження прикладних задач, розвинути геометричну інтуїцію та навчити алгоритмам алгебраїчних досліджень. Щоб обчислити ймовірність виникнення події використовують ще один з розділів вищої математики. Тео́рія ймові́рностей це розділ математики, що вивчає закономірності випадкових явищ: випадкові події, випадкові величини, їхні функції, властивості й операції над ними. Теорія ймовірностей є підґрунтям математичної статистики, що широко використовується для опису й вивчення різноманітних технологічних процесів, зважаючи на їх стохастичність. Таким чином ми можемо обчислити імовірність пожежної небезпеки на даній території в певний момент чи кількість можливих постраждалих, чи імовірну зону ураження тощо. Математична статистика широко використовує методи теорії ймовірностей для побудови і перевірки математичних моделей. Її методи розширюють можливості наукового передбачення і раціонального прийняття рішення багатьох задач, де параметри не можуть бути з'ясовані чи контрольовані з достатньою точністю.

Володіння знаннями математичного, статистичного аналізу та моделювання потрібно для розв’язання спеціалізованих задач та практичних проблем, дослідження процесів і систем стохастичної природи, уміння донести спеціалістам інших галузей результати досліджень. Знання на рівні новітніх досягнень, необхідні для дослідницької або практичної діяльності у сфері математики, статистики та їхніх практичних застосувань. Здатність застосовувати ймовірнісно-статистичні методи в міждисциплінарному кодексі Цивільного захисту, як основа збереження населення та об'єктів інфраструктури в надзвичайних ситуаціях, передбачає захист від катастроф, стихійних лих, воєнних дій тощо; пожежна безпека в свою чергу передбачає безпеку природного середовища, громадських та житлових будівель, сільськогосподарських угідь, транспортних засобів. У певних частинах, звичайно, ці складові безпеки перетинаються, збагачують та взаємодоповнюють одна одну в контексті.

У сфері цивільного захисту вища математика використовуються наступним чином:

- Статистика використовується органами цивільного захисту для запобігання надзвичайних ситуацій та пожеж шляхом запобігання найгіршої можливості розв'язання проблеми (складання оперативних планів та карток, тактичні можливості підрозділів на пожежі згідно з планом залучення сил та засобів по тому чи іншому об'єкту, розрахунок можливого поширення пожежі або розповсюдження наслідків надзвичайної ситуації);
- Прораховуються можливі втрати під час пожежі або надзвичайної ситуації органами державного нагляду та контролю, та робиться профілактика по запобіганню надзвичайних ситуацій на об'єкті;
- Складання експлуатаційних карток на автомобіль (використання паливно-мастильних матеріалів та засобів пожежогасіння).

Отож роль вищої математики у формуванні сфери цивільного захисту багатогранна, тому що за допомогою математичних методів розв'язуються багато прикладних задач цивільного захисту та цивільної оборони.

Література

1. Олійник П.В., Омельчук С.Т., Чаплик В.В., Пельо І. М., Карпенко В.В., Олійник С.П., Гуменюк В.В. Цивільний захист.: Підручник для ВМНЗ IV р.а. Вінниця: Нова книга, 2013 – 328 с.

М. Самотюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПРОБЛЕМИ ТИСЯЧОЛІТТЯ

Наш світ багатогранний, цікавий та водночас таємничий з багатьма невирішеними проблемами. Розглянемо деякі невирішені задачі в області математики на сьогоднішній час.

Проблема *P* = *NP* полягає в наступному: якщо позитивну відповідь на якесь питання можна швидко *перевірити* (за поліноміальний час), то чи правда, що відповідь на це ж питання можна швидко *знайти* (за поліноміальний час і використовуючи поліноміальну пам'ять)? Наприклад, чи вірно, що серед чисел -2, -3, 15, 14, 7, -10, ... є такі, що їхня сума дорівнює 0 (задача про суми підмножин)? Відповідь *так*, тому що -2 - 3 + 15 - 10 = 0 легко перевірити за допомогою кількох додавань (інформацію, необхідну для перевірки позитивної відповіді, називають сертифікатом). Чи випливає звідси, що так само легко підібрати ці числа? Перевірити сертифікат так само легко, як знайти його? Здається, що підібрати числа складніше (не доведено).

Відповідь на питання про рівність класів *P* і *NP* визначила б, чи дійсно завдання легше перевірити, ніж вирішити $P \neq NP$. Або вирішити настільки ж просто, як і перевірити $P = NP$. Це можна застосовувати до всіх подібних задач, а не тільки до задачі про суми підмножин. Також цей принцип може бути застосований до задач, відповідь на які складніша, ніж ТАК чи НІ.

Відносини між класами *P* і *NP* розглядаються в теорії обчислювальної складності (розділу теорії алгоритмів), що вивчає ресурси, необхідні для вирішення деякої задачі. Найзагальніші ресурси - це час (скільки потрібно зробити кроків) і пам'ять (скільки пам'яті потрібно для вирішення задачі). З визначення класів *P* і *NP* відразу випливає наслідок. Проте досі нічого не відомо про строгість цього включення, тобто чи існує алгоритм, який лежить в *NP*, але не лежить в *P*. Якщо такого алгоритму не існує, то всі завдання, що належать класу *NP*, можна буде вирішувати за поліноміальний час, що значно спрощує обчислювальні операції. Зараз найскладніші *NP*-задачі (так звані *NP* - повні задачі) можна вирішити за експоненційний час, що майже завжди є неприйнятним. Вперше питання про рівність класів було поставлено незалежно Куком і Левіним у 1971 р. На сьогоднішній день більшість математиків вважають, що ці класи нерівні. Згідно з опитуванням, проведеним у 2002 р. серед 100 вчених, 61 людина вважає, що відповідь — «не рівні», 9 — «рівні», 22 не змогли відповісти і 8 вважають, що гіпотеза не виводиться з поточної системи аксіом і, таким чином, не може бути доведена або спростована.

Зараз проблема рівності класів *P* і *NP* є однією із семи проблем тисячоліття, за вирішення якої Математичний інститут Клея призначив премію в мільйон доларів США. У серпні 2010 року американський дослідник Вінай Деолалікар надіслав деяким вченим на перевірку своє доведення нерівності $P \neq$

NP. Стівен Кук назвав його препринт «відносно серйозною спробою вирішення проблеми *P* проти *NP*».

Наведемо **гіпотезу Годжа**, що є важливою проблемою алгебраїчної геометрії. Вона була сформульована шотландським математиком Вільямом Воллансом Дугласом Годжа в період між 1930 - 1940 роками. Гіпотеза описує класи когомологій на комплексних проективних многовидах, реалізовані алгебраїчними підмноговидами. Тобто цикли Годжа є комбінаціями об'єктів, що мають геометричну інтерпретацію, — алгебраїчних циклів.

У двадцятому столітті математики винайшли потужні методи дослідження форми складних об'єктів. Основна ідея полягає в тому, щоб з'ясувати, до якої міри ми можемо апроксимувати форму даного об'єкта, склеюючи разом прості тіла зростаючої розмірності. Цей метод виявився ефективним при описі різноманітних об'єктів, що зустрічаються в математиці. При цьому були не ясні геометричні обґрунтування методу: в деяких випадках було необхідно додавати частини, що не мали ніякого геометричного тлумачення.

Гіпотеза Пуанкаре вважається найвідомішою задачею топології. Неформально кажучи, вона стверджує, що всякий «тривимірний об'єкт», що володіє деякими властивостями тривимірної сфери (наприклад, кожну петлю всередині нього повинно бути можливо стягнути), зобов'язаний бути сферою з точністю до деформації. Гіпотезу сформульовано Анрі Пуанкаре у 1904 р. Спроби довести гіпотезу Пуанкаре, як успішні, так і невдалі, привели до численних просувань у топології різноманіть. Доведення гіпотези Пуанкаре (і загальнішої гіпотези Терстона про геометризацію), опубліковано тільки в 2002 р. Григорієм Перельманом р.)

Гіпотеза Берча – Свіннертона - Дайера описує множину раціональних розв'язків рівнянь, які визначаються еліптичною кривою. Це є відкритою проблемою у теорії чисел і широко визнана як одна з найбільш складних математичних проблем. Гіпотеза була вибрана в якості однієї з семи проблем тисячоліття, включених Математичним інститутом Клея до списку задач за які запропонована премію за перше правильне доведення. Гіпотеза названа на честь математиків Брайана Берча та Пітера Свіннертона - Даєра, які сформулювали гіпотезу в першій половині 1960-х років за допомогою машинних обчислень. Станом на 2016 рік доведено лише окремі випадки гіпотези.

Література

1. Кононенко О.Ю. Актуальні проблеми сталого розвитку: навчально - методичний посібник / О.Ю. Кононенко. –К.: ДП «Прінт сервіс», 2016. – 109 с.

В.В. Гудем'юк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О. О. Карабин**, кандитат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА В ІГРАХ

Створення ігор здається чимось цікавим і для багатьох стало причиною почати програмувати, однак розробка ігор вимагає від розробника непоганого знання математики. Але якої конкретно? Математика - необхідна дисципліна, що вимагає належного вивчення в розробці комп'ютерної гри. Математика - це все, коли справа доходить до розробки ігор -- починаючи від можливості розрахувати траєкторію птиці в грі Angry Birds до можливості упевнитися, що персонаж може стрибнути і приземлитися назад на землю. Без математики ігри просто б не працювали: персонаж не зміг би підніматися по схилу або ковзати з нього, випустити кулю зі своєї рушниці або навіть просто стрибати. Математика - це мука в торті, який ігрові розробники називають кінцевим продуктом. Математика використовується в кожному з аспектів розробки гри. Maya - програма, яка записує всі вершини, нормалізує обмін речовин моделей в математичній формі і дозволяє розробникам створювати цілі світи або окремих персонажів, щоб ті навіть не замислювалися про математику. Простими словами, ви можете написати модель Годзілли в блокноті і потім відкрити її в програмі. Однак більша частина математики вживається прямо під час гри ігровими движками. Вони виконують дуже важливу роботу, так як без неї гра просто не зможе існувати. Створення движка включає в себе дуже багато математики. Ось деякі приклади: хвилі красиво вдаряються об краї вашого корабля в Assassin's Creed: Black Flag, кулі свистять, пролітаючи над вашою головою в Call Of Duty, красива анімація в UI, яка, до того ж, генерується процедурно, дрифт на швидкості 80 кілометрів на годину в Need For Speed, Сонік може бігти, а Маріо може стрибати ковзання вниз по горі на сноуборді в SSX, ракета відривається від Землі в Kerbal Space Program. Коли Маріо стрибає, він не просто стрибає вздовж прямої лінії, він описує параболу своїм стрибками. Адже було б дивно, якби він відривався від землі, потім летів вперед по прямій лінії, а потім так само прямо опускався вниз. Це б виглядаю безглуздо і неправильно. А Kerbal Space Program - це взагалі суцільна математика, так як там використовується найбільш точна симуляція ньютонівської фізики с усіма її законами.

Розділи математики, які використовуються в створенні ігор: алгебра, дискретна математика тригонометрія, математичний аналіз, лінійна алгебра**.**

Найважливіші поняття для розробки ігор з точки зору математики: вектори і їх скалярний і векторний добутки вектори, відображення, матриці.

Все разом, як правило, використовується в розвинених іграх ААА-рівня. Прості ж ігри зазвичай вимагають менше математики.

Як математика використовується в програмуванні. Математикою в іграх може називатися просто додавання X і Y, маніпулювання синусами, косинусами тощо. Однак в деяких випадках над реалізацією будь-якого правила в грі потрібно подумати годину-дві. Як приклад можна поглянути на такі процеси, як створення векторів, названих MAX_SPEED і MIN_SPEED, і додавання їх в ігровий цикл для перевірки швидкостей, розрахунок швидкості космічного корабля, деформація поверхонь при зіткненні і зміна траєкторії і швидкості в залежності від сили удару. Саме тому компанії, що займаються розробкою ігор, вимагають від своїх співробітників знання математики і алгоритмів. Знання таких речей не просто допоможе розробити логіку гри, але і якісно допоможе оптимізувати саму гру, знаходячи альтернативні шляхи, які допомагають уникнути зайвих обчислень. Так що тепер, коли будете задавати питання до свого вчителя математики, чи буде потрібна вам математика в житті, майте на увазі, що якщо ви хочете бути розробником ігор, то так, абсолютно точно буде потрібно.

Деякі речі, які повністю спираються на математику: симуляція рідин, анімація, алгоритми, архітектура ігрових движків, написання ігрової логіки, аналітика та збір даних, розрахунок кадрів в секунду, ігрова фізика, графіка Шейдери, штучний інтелект, процедурна генерація, візуалізація полігонів.

Х.В. Мечус
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

НОВА НОРМАЛЬНІСТЬ. СТАТИСТИКА

Статистика раптом стала крутою і модною. Завдяки появі інтернету, інтернет-торгівлі, соціальних мереж, проекту «Геном людини» і цифровій культурі загалом, світ тепер починає дружити з даними. Маркетологи уважно вивчають наші звички і смаки. Спецслужби збирають дані про наше перебування, електронні листи й телефонні дзвінки. Фахівці зі спортивної статистики жонглюють числами, вирішуючи, яких гравців продати, яких купити, а яких – посадити на лавку запасних. Тож що таке статистика і як нею користуватись?

Термін «статистика» походить від латинського «status», що означає положення, стан явищ. Нині термін «статистика» використовують у кількох значеннях:

- дані, які характеризують масові суспільні явища;

- процес збирання, зберігання і оброблення даних про масові суспільні явища, тобто галузь практичної діяльності, спрямованої на одержання, оброблення, аналіз і видання масових даних про явища і процеси суспільного життя;
- наука, яка вивчає величину, розміри і кількісну сторону масових суспільних явищ у нерозривному зв'язку з якісною стороною цих явищ, з їх соціально-економічним змістом

Розглянемо коротко зміст кожного з видів статистики за традиційною схемою їх поділу.

Математична статистика — це галузь математичних знань. Вона розробляє раціональні прийоми (способи) систематизації, обробки і аналізу даних статистичних спостережень масових явищ з метою встановлення характерних для них статистичних закономірностей, використання для наукових і практичних висновків.

Загальна теорія статистики містить принципи статистичної науки стосовно різних сторін суспільного життя, тобто загальні правила і методи статистичного дослідження. Вона розробляє понятійний апарат статистичної науки, систему категорій, розглядає у загальному вигляді методи збирання, зведення, узагальнення і аналізу статистичних даних. Курс загальної теорії статистики побудований відповідно до стадій статистичного дослідження.

Соціальна статистика — галузь статистики, яка вивчає кількісну і якісну сторони масових суспільних явищ і процесів, що відбуваються в соціальному житті, і розробляє Інтегровану систему показників здійснення соціальних процесів і явищ.

Економічна статистика як галузь єдиної статистичної науки, спираючись на положення загальної теорії статистики, вивчає кількісну сторону масових суспільних явищ і процесів у сфері матеріального виробництва з метою виявлення пропорцій тенденцій і закономірностей їх розвитку. Тобто вона кількісно характеризує дію економічних законів, досліджує обсяг, структуру і динаміку явищ, показує взаємозалежності економічних процесів з урахуванням конкретних природних та історичних умов розвитку суспільства.

Галузеві статистики вивчають показники процесу виробництва в галузях матеріального виробництва (сільському господарстві, промисловості), в галузях, де продовжується процес виробництва у сфері обігу (торгівля, зв'язок, транспорт тощо); показники роботи галузей невиробничої сфери (житлово-комунального господарства, науки, фізичної культури і спорту тощо).

Отже, слід визнати, що статистика у наш час допомагає нам у всьому, та і як предмет вона відіграє важливу роль.

Література:

1. Види статистик та поняття. Інтернет ресурс: https://buklib.net/books/35935/
2. Що таке статистика? Інтернет ресурс: https://studfile.net/preview/5921911/

В.С. Яковчук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки.*

ЗОЛОТИЙ ПЕРЕТИН. СУЧАСНЕ ВИКОРИСТАННЯ

З давніх часів люди намагалися пізнати світ через пошук гармонії і досконалості. З часів Піфагора вважали гармонійним поділ, в якому менша частина відноситься до більшої, як більша частина відноситься до всього цілого. В епоху Відродження Леонардо да Вінчі назвав такий поділ золотим перетином, а Лука Пачолі - божественної пропорцією. Деякі сучасні вчені впевнені, що настав момент, коли золотий переріз повинен зайняти своє лідируюче місце в єдиній науці майбутнього. Вважається, що поняття про золотий перетин запровадив Піфагор. Утім, існує припущення, що Піфагор запозичив знання золотого перетину у єгиптян і вавилонян.

Ідеї Піфагора у своїх дослідженнях продовжив Платон. Його діалог Тімей висвітлює математичні й естетичні переконання школи Піфагора і, зокрема, питання золотого перетину.

В античній літературі, що дійшла до нас, золотий перетин вперше згадується в «Початках» Евкліда — у 2-й книзі дається геометрична побудова «золотого перетину». Після Евкліда його вивчали Гіпсикл (II ст. до н.е.) та Папп.

У середньовічній Європі із «золотим перетином» знайомились за арабськими перекладами Евкліда. Секрети «золотого перетину» ревно оберігалися й були відомі лише утаємниченим.

В епоху Відродження інтерес до золотого перерізу серед учених і художників посилився, зокрема, у зв'язку з його застосуванням, як у геометрії, так і в мистецтві, особливо — в архітектурі. Велику увагу йому приділив Леонардо да Вінчі. Саме він дав співвідношенню назву «золотий переріз» (лат. *Sectio aurea*). 1509 року у Венеції було видано книгу Луки Пачолі «Божественна пропорція» з блискуче виконаними ілюстраціями (вважають, що їх зробив Леонардо да Вінчі). Над тими ж проблемами працював Альбрехт Дюрер у Німеччині.

Із часом про золотий переріз дещо забули. Знову його «відкрив» німецький дослідник Адольф Цейзінг у своїй праці «Естетичні дослідження» (1855 р.)

Під «правилом золотого перетину» в архітектурі та мистецтві зазвичай розуміються композиції, що містять пропорції, близькі до золотого перетину. Про золотий перетин згадується не лише в математиці, а й в музиці, мистецтві, архітектурі (найчастіше), біології та медицині.

Людина сприймає предмети, що її оточують, за формою. А цікавість до форми будь-якого предмету може бути викликана або життєвою необхідністю, або ж красою форми. Форма, в основі побудови якої лежать комбінація симетрії й золотого перетину, сприяє найкращому зоровому сприйняттю й появі відчуття краси й гармонії.

Ціле завжди складається із частин, частини різної величини перебувають у певному відношенні один до одного й до цілого. Принцип золотого перетину – вищий прояв структурної й функціональної досконалості цілого і його частин у мистецтві, науці, техніці й пртроді.

Наприкінці XIX – початку XX ст. з’явилося чимало чисто формалістичних теорій про застосування золотого перетину у творах мистецтва й архітектури. З розвитком дизайну й технічної естетики чинність закону золотого перетину поширилася на конструювання машин, меблів і т.д.

Безпосереднім чином з правилом золотого перетину пов'язане ім'я італійського математика Леонардо Фібоначчі. В результаті вирішення одного із завдань вчений вийшов на послідовність чисел, відому тепер як ряд Фібоначчі: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 і т. д.

На тотожність цієї послідовності до золотої пропорції звернув увагу Кеплер: «вона влаштована так, що два молодших члени цієї нескінченної пропорції в сумі дають третій член, а будь-які два останніх члени, якщо їх скласти, дають наступний член, причому та ж пропорція зберігається до нескінченності». Зараз ряд Фібоначчі - це арифметична основа для розрахунків пропорцій золотого перетину у всіх його проявах. Леонардо да Вінчі також багато часу присвятив вивченню особливостей золотого перерізу, швидше за все саме йому належить і сам термін. Його малюнки стереометричного тіла, утвореного правильними пятикутниками, доводять, що кожен з отриманих при розтині прямокутників дає співвідношення сторін в золотому перерізі. Згодом правило золотого перетину перетворилося в академічну рутину, і тільки філософ Адольф Цейзинг в 1855 році повернув йому друге життя. Він довів пропорції золотого перетину до абсолюту, зробивши їх універсальними для всіх явищ навколишнього світу. Втім, його «математична природність» викликала багато критики.

Література

1. Грант Аракелян Математика и история золотого сечения. — Логос, 2014. — 404 с. ISBN 978-5-98704-663-0.
2. Стелік Н. Є. «Гармонія давньоєгипетської архітектури.» Гірки: БГСХА. 2009, 108 с.
3. Вікіпедія. Золотий перетин.

К.Е. Кравченко, Р.І. Сташків
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник О.С. Петрученко, *к.т.н.,* ***доцент кафедри інженерної механіки (озброєння та техніки інженерних військ)***

МАТЕМАТИКА - ЦЕ НЕ НУДНО

«2020 рік в Україні оголошено Роком математики.»

Кожен, хто хоче мати затребувану й високооплачувану професію, пов'язану з інжинірингом чи IT, створенням чи аналізом великих даних, хто хоче навчитися мислити (незалежно від того, гуманітарій він чи технар), бути конкурентоспроможним, географічно універсальним і реалізуватися в житті, — повинен знати математику. І Рік математики — добра нагода поговорити про її популяризацію та про те, як перетворити цей предмет із «примусового» на улюблений».

Математика має минуле, сучасне та майбутнє.

"Від Галілея, який міг назвати швидкість кулі, що котиться донизу схилом, і до, наприклад, бозона Хіггса, існування якого довели математичним шляхом - до того, як виявили саму частку, - ця здатність передбачати існування речей, які ніхто не бачив, здається мені приголомшливою", - написав Серхіо.

"Що таке математика: модель, опис, метафора реальності - або сама реальність?

Її ділять на абстрактну (чисту) математику це ті частини математики, які ще не знайшли свого прикладного застосування. Простіше кажучи, абстрактна математика - це не прикладна математика. Характеристиками чистих математичних теорій є абстрактність, строгість та краса.

Чиста математика не намагається отримати знання про світ, а створює свої, з схожими правилами. Її ціллю є скоріше задоволення самого математика від застосування методу, та його краси. Єдиним методами математики звісно є дедукція та уява.

Вона оперує об'єктами в ідеальному (від слова "ідея") світі, з власними законами та надає їм довільних властивостей. Історія показує що області чистої математики з часом стають прикладними, і сконструйовані абстрактною математикою об'єкти, можуть знаходити своє застосування в моделях прикладної математики.

Наприклад так було з теорією чисел, яка не мала свого застосування аж до 20 століття, коли з'явилась сучасна криптографія. Так було з часів древньої Греції, хоча й тоді математика використовувалась в архітектурі й літочисленні. Цитата з "Історії західної філософії" Бертрана Рассела:

> «Евклід зневажав практичну корисність яку впроваджував Платон. Кажуть, що один учень прослухавши докази, запитав, яку користь він отримає від вивчення геометрії. Тоді Евклід покликав раба і сказав: «Дай юнаку монету, оскільки він неодмінно повинен отримувати вигоду з того, що вивчає». Однак презирство до практики виявилось прагматично виправданим. Ніхто не припускав за часів греків, що вивчення конічних перерізів принесе яку-небудь користь: але, нарешті, в XVII столітті Галілей відкрив, що снаряди рухаються по параболі, а Кеплер - що

планети рухаються по еліпсах. Несподівано та робота, яку греки виконали з чистої любові до теорії, стала ключем до ведення війни і до розвитку астрономії.»

Математика не є нудною і не цікавою наукою, підтвердженням цьому є рекреаційна математика або математичне дозвілля — це загальний термін для занять, якими займаються з метою цікавості, а не для науково-прикладного професійного застосування; однак рекреаційна математика не є виключно сферою аматорів. Вона часто включає математичні головоломки та ігри, що часто приваблює дітей та дорослих.

Найбільш відомими темами рекреаційної математики є магічні квадрати, фрактали, логічні головоломки та математичні шахові задачі.

Якщо математику сказати слово “фокус” — він спершу подумає про фокус еліпса, параболи чи гіперболи (це спеціальні точки, які визначають ці фігури).

Для всіх інших слова “математика” і “фокуси” в одному реченні можуть здаватись дивиною — але математику таки можна застосовувати у всіх галузях, в тому числі й в розвагах. Математичні фокуси дуже зручні для дитячого свята, наукового фестивалю, незвичайного уроку — можна обійтись без складного обладнання та спецефектів. Але сам фокусник повинен вміти добре рахувати в голові (жодні незвичайні здібності непотрібні) і знати кілька математичних правил та закономірностей — ознаки подільності, в тому числі на 7 та 11, кілька прийомів швидких розрахунків та нескладну табличку для визначення днів тижня.

Зовсім простий дитячий фокус — просимо загадати число від 1 до 20 (позначимо через x), і помножити це число на 3. Глядачі мають отримати 3x. Потім просимо додати до 3x 24, поділити отриманий результат на 3 і відняти від нього задумане число. Тепер легко вгадати, що отримають глядачі: (3x+24):3=8. Вгадали!

Трошки складніший фокус — підійде для аудиторії третьокласників і для дорослих. Просимо задумати трьохзначне число — таке щоб друга цифра була менша за першу, а третя менша за другу. Алгебраїчний запис такого числа: 100a+10b+c.

З задуманого числа віднімаємо “перевернуте” число 100c +10b+a. “Перевертаємо” результат і додаємо його до раніше отриманої різниці. А тепер “вгадуємо” отриману суму — це 1089.

Наприклад, нашим умовам відповідає задумане число 432.

Глядачі виконують обчислення: 432-234=198

198+891 дійсно дорівнює 1089. Це легко довести —

100a+10b+c – (100c +10b+a) = 100 (a-c) + c-a = 100(a-c-1) +90 +(10+c-a).

Отриманий результат завжди

100(a-c-1) +90 +(10+c-a) плюс перевернуте число 100(10+c-a) +90 +(a-c-1) = = 900+180+9=1089.

Д. Кухарська
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПРОГРАМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВУАННЯ ДЛЯ ОЦІНКИ ЕВАКУАЦІЇ

Програмний пакет системи GPSS орієнтований на клас об'єктів, процес функціонування яких можна представити у вигляді безлічі станів і правил переходу з одного стану в інший, що визначаються в дискретній просторово-часовій області, а прикладами таких об'єктів є виробничі і обчислювальні системи, комп'ютерні мережі, системи передачі повідомлень тощо. З математичної точки зору це відомі задачі систем масового обслуговування, які часто аналітично розвя’зати неможливо. Тому важливим є створення адекватної імітаційної моделі технологічної системи, наприклад в програмному пакеті GPSS. За розглянутою методикою можна вирішувати проблемні завдання ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій, наприклад – час ліквідації пожеж, евакуацію населення, ліквідації повеней та багато інших.

Розглянемо поетапно імітаційну модель евакуації із споруди з можливим утворенням черг відповідно для складеного програмного коду (рис.1). Готуємо програму до моделювання за пунктом меню "Command / Create simulation". Перегляд стану черг здійснюємо за "Window / Simulation / Queues window". Для запуску моделювання використовуємо "Command / START", ввівши "START 1000. При цьому запустилося моделювання обробки тисячі транзактів (відповідає евакуації тисячі людей). Під час моделювання у вікні "QUEUE ENTITIES" відображається інформація про поточний стан черги моделі "STELLAJ" (табл. 1). У вікні "PLOTS" відображається графік зміни числа транзактів в черзі. Це дозволяє простежити динаміку зміни даного параметра, виявити моменти перевантажень і т.д. Значення, яке відображено в стовпці "Maximum Content" у вікні "QUEUE ENTITIES", визначає необхідну ємність стелажа (кількість людей в очікуванні евакуації0. У стовпці "Utilization" (відсоток використання) відображається значення, що визначає частку часу (коефіцієнт завантаження), коли евакуаційний вихід був зайнятий. Якщо у вікні "PLOTS" не видно достатньо графіки (які динамічно змінюються в часі), слід змінити масштабування, у "Max Value" значення зменшуємо, з‘являється додаткове відповідне вікно "PLOTS". Такі дії можна повторювати (що було зокрема і в нашому випадку). Запустили також моделювання обробки, для наочності роботи програми, додатково 500 і 10000 транзактів. Результати показано в таблиці 1, рис.1, зауважимо, що представлені дані дають багато інформації при евакуації, максимальний розмір утвореної черги, розмір черги на евакуаційному виході в даний момент часу, зручною є графічна інформація виникнення черг у часовому діапазоні та ін. "Нульові входи" – означає кількість евакуйованих, що уникнули черги. Такий чисельний аналіз можна додатково використовувати для оцінки ефективності евакуації людей зі споруд.

Таблиця 1

.	QUEUE	MAX	CONT	ENTRY	ENTRY (0)	AVE. CONT	AVE. TIME	AVE. (-0)	RETRY
ть из в	*Номер або назва черги*	*Максимальна довжина черги*	*Довжина черги в даний момент*	*Загальна к-сть входів*	*К-сть «нульо-вих» входів*	*Середня довжи-на черги*	*Середній час очікуван-ня в черзі*	*Середній час очікування в черзі без врахуван-ня «нульо-вих» входів*	*Кількість транзак тів, що очікують спецумов*
0	STELLA J 1.1.1.	1	0	1000	893	0.007	0.150	1.404	0
0	STELLA J 1.1.2.	1	0	2000	1770	0.008	0.174	1.510	0
0	STELLA J 1.1.3.	1	0	3000	2637	0.009	0.181	1.479	0
)	STELLA J 1.1.4.	1	0	3500	3067	0.009	0.185	1.485	0
00	STELLA J 1.1.5.	1	0	13500	11848	0.008	0.177	1.449	0

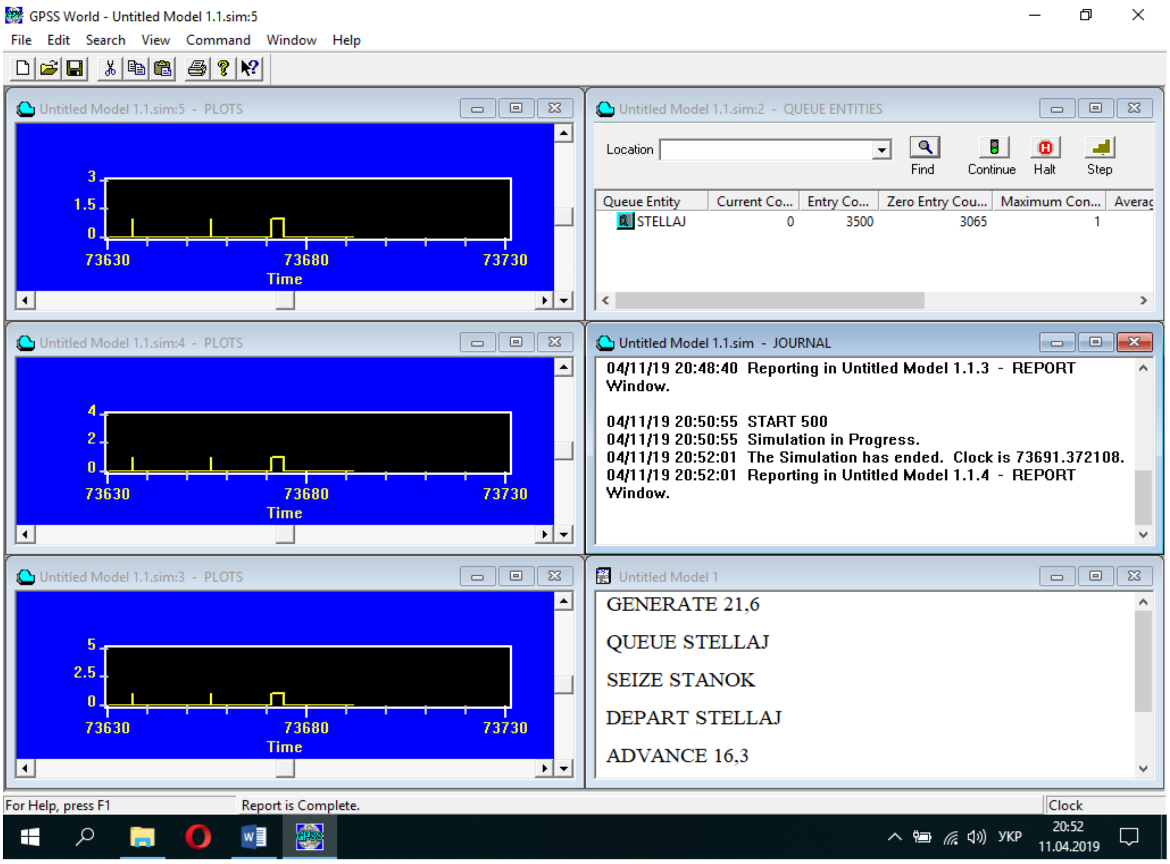


Рис.1

Ю. Якубович
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНА ОЦІНКА ЗА МАТРИЦЯМИ ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО РАНЖУВАННЯ ПО РАНЖУВАННЯМ ЕКСПЕРТІВ

Важливою задачею адекватної експертної оцінки є математичний аналіз узагальненого ранжування по індивідуальним ранжуванням експертів. Для простоти розглянемо спочатку випадок однієї ознаки порівняння, Кожне ранжування можна подати у вигляді матриці парних порівнянь з елементами, що визначаються по правилу

$$y_{ik}^{s} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_{is} \ge x_{ks} \\ 0 & \text{при } x_{is} < x_{ks} \end{cases} \quad (s = \overline{1,d}; i,k = \overline{1,m}) \qquad (1)$$

де x_{is} і x_{ks} - ранги, які надаються s – м експертом i – му і k – му об’єктам.

Якщо є d експертів, то кожний з них дає своє ранжування, якому відповідає матриця парних порівнянь. Таким чином, кількість матриць парних порівнянь дорівнює числу експертів.

Введемо відстань (метрику) між матрицями парних порівнювань, яку будемо вираховувати по формулі:

$$d_{sl} = \sum_{i,k=1} | y_{ik}^{s} - y_{ik}^{l} | \quad (s,l = \overline{1,d}) \qquad (2)$$

Суть цього виразує в тому, що відстань між матрицями парних порівнювань визначається числом порозрядної розбіжності усіх значень елементів матриці (так звана метрика Хеммінга). Використовуючи цю матрицю, визначаємо узагальнене ранжування як таку матрицю парних порівнянь, яка найкращим чином узгоджується з матрицями парних порівнянь, які отримуються з ранжувань експертів. Поняття найкращого узгодження на практиці частіше усього визначають як *медіану* . Медіана є така матриця парних порівнювань, сума відстанів від якої до усіх матриць парних порівнювань, отриманих експертами, є мінімальною

$$\| y_{ik} \| = \min_{yik} \sum_{s=1}^{d} \sum_{i,k=1}^{m} | y_{ik}^{s} - y_{ik} | \qquad (3)$$

Доведено, що побудова матриці парних порівнянь, яка відповідає медіані здійснюється по принципу простої більшості голосів експертів для кожного елементу матриці. Це витікає, в першу чергу з того, що модуль різниці змінних в (3) дорівнює або одиниці, або нулю, тому модуль різниці дорівнює квадрату цієї різниці. Опускаючи проміжні викладки, у підсумку отримуємо наступне:

$$\min_{yik} \sum_{s=1}^{d} \sum_{i,k=1}^{m} | y_{ik}^{s} - y_{ik} | = \max_{yik} \sum_{i,k=1}^{m} y_{ik} (a_{ik} - \frac{d}{2}) \qquad (4)$$

де $a_{ik} = \sum_{s=1}^{d} y_{ik}^{s}$, а d – кількість експертів у групі.

Максимум по змінним y_{ik}, які приймають значення 0,1 досягається по наступному правилу:

$$y_{ik}^{*} = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ a_{ik} \geq \dfrac{d}{2} \\ 0 \ \text{при} \ a_{ik} < \dfrac{d}{2} \end{cases} \qquad (5)$$

Величини a_{ik} є кількістю голосів, поданих експертами за перевагу i – го об’єкту k – му об’єкту. Тому в узагальненій матриці парних порівнювань у відповідності до оптимальних правил рішення (4) в ik – му елементі ставиться одиниця, т.т. приймається, що $O_i > O_k$, якщо більше половини експертів висловилися за цю перевагу. Таким чином, всі елементи узагальненої матриці парних порівнювань визначаються по правилу більшості голосів.

У розглянутому алгоритмі побудови узагальненої матриці парних порівнювань можна врахувати компетентність експертів шляхом введення коефіцієнтів компетентності k_s у співвідношення (3):

$$\| y_{ik}^{*} \| \Leftarrow \min_{yik} \sum_{s=1}^{d} \sum_{i,k=1}^{m} k_s \, | y_{ik}^{s} - y_{ik} | \qquad (6)$$

Виконуючи перетворення, отримуємо наступне правило побудови узагальненої матриці парних порівнювань, коли враховуються коефіцієнти компетентності експертів $k_s (s = \overline{1, d})$:

$$y_{ik}^{*} = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ b_{ik} \geq \frac{1}{2} \\ 0 \ \text{при} \ b_{ik} < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (7)$$

де величини b_{ik} дорівнюють:

$$b_{ik} = \sum_{s=1}^{d} k_s y_{ik}^{s} \ \ (i, k = \overline{1, m}) \qquad (8)$$

Величина порога в (8) дорівнює ½ бо величини b_{ik} можна розглядати як імовірність того, що i – й об’єкт має перевагу над k – м об’єктом.

При наявності декількох ситуацій експерти упорядковують об’єкти (рішення) для кожної ситуації окремо.

А.І. Сениш
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.Е. Васильєва,** д. т. н., професор кафедри прикладної математики і механіки*

ЕФЕКТ ЯКОРУВАННЯ ЧИ ДРУЖБА З МАТЕМАТИКОЮ?

Звичайний калькулятор може виконувати математичні обчислення в тисячу разів вірніше, ніж людина. А чи знаєте Ви, що людський мозок здатний виконувати 1016 операцій в секунду. Жоден комп'ютер на такий обсяг роботи не здатний. Але при цьому людський мозок – вкрай ненадійний пристрій. Наші спогади суб'єктивні, уривчасті і мінливі. Сприйняття і обробка інформації про навколишню дійсність мають безліч дрібних викривлень від справжньої дійсності. Неточності і погрішності в нашому сприйнятті називаються когнітивними викривленнями. Отже, розглянемо один із когнітивних видів.

Якорування або прив'язка чи фокусування — це когнітивне упередження, яке описує звичайну схильність людей при прийнятті рішень надто сильно покладатися на перший запропонований шматок інформації («якір»). В процесі прийняття рішень, якорування відбувається, коли людина використовує початкову інформацію для прийняття подальших рішень. Отримуючи нову інформацію, ми співвідносимо її з вже наявними даними. Особливо це стосується чисел, отже – математики.

Якорування та коригування — це психологічна евристика, що впливає на те, як люди інтуїтивно оцінюють ймовірності. Відповідно до цієї евристики, люди починають з неявно запропонованого їм орієнтиру («якоря») та коригують його до досягнення своєї оцінки. Людина починає з першого наближення (якір), а потім робить маленькі коригування на основі додаткової інформації.

Гіпотезу про евристику якорування та коригування вперше висунули Еймос Тверські та Деніел Канеман. Розглянемо приклад, коли без математики не обійтись. В одному з їх перших досліджень, учасників попросили, протягом 5 секунд помножити числа від одного до восьми, але в двох варіантах: або як 1 х 2 х 3 х 4 х 5 х 6 х 7 х 8, або обернено 8 х 7 х 6 х 5 х 4 х 3 х 2 х 1. Оскільки в учасників не було часу порахувати повну відповідь, вони були вимушені надати оцінку після декількох перших множень. Коли їх результат їх множення був малим (бо ряд починався з малих чисел) — середня оцінка була 512; коли навпаки — 2 250 (Правильна відповідь — 40 320).Різноманітні дослідження показують, що якорування дуже важко уникнути.

Існує багато факторів, які впливають на ефект якорування:

Настрій. Значна кількість досліджень виявила зв’язок між сумним настроєм чи депресією з більш широкою та точною оцінкою проблем. Через це, ранні дослідження висували теорію, що людина з більш депресивним настроєм використовуватиме якорування менше, ніж більш задоволені люди. Однак останні дослідження вказують на протилежний ефект: сумні люди з *більшою* ймовірністю використають якорування, ніж люди зі щасливим або нейтральним настроєм.

Досвід. Ранні дослідження встановили, що експерти (люди зі значними знаннями, досвідом або спеціальними знаннями в певній галузі) чинили більший супротив ефекту якорування. Однак, численні наступні дослідження продемонстрували, що хоча досвід може деколи знизити ефект, навіть експерти піддаються якоруванню. Питання залишається відкритим. Але чим глибшими будуть математичні знання, тим імовірніше, що ефект якорування можна мінімізувати.

Особистість. Дослідження вказали на кореляцію впливу якорування з більшістю з п'яти великих рис особистості. Люди з високою доброзичливістю та сумлінністю з більшою ймовірністю піддаються впливу якорування, а виражені екстраверти — менше. Інше дослідження показало, що більш відкриті до нового досвіду більше піддаються якоруванню. Це лише риси характеру та психологічні портрети, але варто враховувати інтелект та відповідно фундаментальні знання прикладних та технічних наук.

Висновки

Вплив випадкових прив’язок-якорів багато чого пояснює про відношення між двома системами. Ефект якорування завжди досліджували на прикладі завдань із формування суджень і здійснення вибору, які виконує Система 2, що працює з числами, а отже з математикою, витягнутими з пам’яті Системою 1 мимоволі й автоматично. Таким чином, Система 2 схильна піддаватися впливу прив’язок, які полегшують віднаходження будь-якої інформації в пам’яті. До того ж Система 2 не контролює цього. Але ми тепер знаємо, що система повільного мислення і математика «сіамські близнюки».

Література

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/
2. Деніел Канеман«Мислення швидке і повільне»
3. http://iqholding.com.ua/
4. https://belziuk.com/

К.Ю. Савчин
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.Ю. Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО РАДІОАКТИВНИЙ РОЗПАД

У різних сферах діяльності людини виникає багато задач, які описуються рівняннями, що містять похідні функцій. Це так звані диференціальні рівняння. Припустимо відбувається деякий процес наприклад, фізичний, хімічний. Нас цікавить певна функціональна характеристика даного процесу, тобто залежність від часу, температури тіла, що охолоджується або кількості речовин, які утворюються в результаті хімічної реакції. Якщо повна інформація про хід цього процесу є достатньою, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю буде диференціальне рівняння, одним із розв’язків якого і є шукана функціональна залежність.

Розглянемо задачу про розпад радіоактивної речовини.

Задача. Швидкість розпаду радію прямо пропорційна наявній його масі. Визначити, який відсоток маси радію розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період піврозпаду радію (період часу, за якого розпадеться половина існуючої маси радію) становить 1590 років.

Складемо математичну модель та знайдемо розв'язок задачі.

Відомо, що швидкість розпаду радію вимірюється його кількістю, яка розпалася за одиницю часу. Нехай $m = m(t)$ – маса радію в момент часу t. За малий проміжок часу Δt, кількість радію, яка розпалася рівна $k \cdot m \cdot \Delta t$, де k – коефіцієнт пропорційності. Ця кількість, яка береться із знаком " – ", так як маса зменшується, дорівнює приросту маси за час Δt, тобто

$$\Delta m = -k \cdot m \cdot \Delta t. \qquad (1)$$

Поділивши обидві частини рівності (1) на Δt та перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, одержимо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m.$$

Відокремивши змінні, приходимо до диференціального рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dm}{m} = -k \cdot dt. \qquad (2)$$

Проінтегруємо ліву та праву частини рівняння (2). Матимемо

$$\ln m = -k \cdot t + \ln C.$$

Використовуючи основні властивості логарифмів, після потенціювання, одержуємо таку залежність

$$m = C \cdot e^{-k \cdot t}. \qquad (3)$$

Нехай в початковий момент часу $t = 0$ маса радіоактивної речовини була відома і становила m_0. Початкова умова матиме вигляд

$$m(0) = m_0.$$

Підставляючи початкову умову у рівність (3), матимемо

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0},$$

звідси $C = m_0$.

Таким чином, залежність маси радіоактивної речовини від часу матиме вигляд (рис. 1)

$$m = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}. \qquad (4)$$

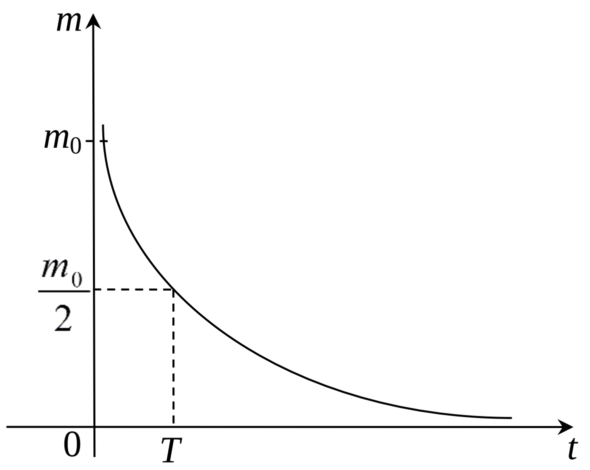


Рис. 1. Графік залежність маси радіоактивної речовини від часу

У виразі (4) залишається невідомим коефіцієнт k. З умови задачі відомо, що період часу, за якого розпадеться половина існуючої маси радію становить T = 1590 років. Отже, повинна виконуватись умова

$$m(1590) = \frac{m_0}{2},$$

тобто

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k},$$

або

$$-1590k = -\ln 2,\ k \approx 0{,}00044.$$

Таким чином, шукана залежність

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-0{,}00044 \cdot t}.$$

Кількість радію, який не розпадеться через 200 років

$$m(200) = m_0 \cdot e^{-0{,}00044 \cdot 200} = m_0 \cdot e^{-0{,}088} = 0{,}915 m_0.$$

Отже, через 200 років розпадеться лише 8,5 % радію.

Література

1. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.
2. *Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін.* Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. – Л. Вид. Національного університету “Львівська політехніка”, 2001. – 244 с.
3. *Герасимчук В.С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов // Навч. посіб. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 578 с.

М.А. Шульженко
Херсонський національний технічний університет
Науковий керівник ***Н.В. Старун****, кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри вищої математики і математичного моделювання*

ПРОБЛЕМИ КОНСТРУКТИВНОЇ ТЕОРІЇ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Одним із ефективних способів розв'язання диференціальних рівнянь є зведення досліджуваного рівняння до вигляду іншого рівняння, розв'язок якого є відомим. Перше перетворення запропоновано німецьким математиком Е.Е. Куммером у 1834 р для звичайних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку [1]. Він розглядав перетворення рівнянь виду:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+p(x)\cdot\frac{d}{dx}y(x)+q(x)\cdot y(x)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}Y(z)+P(z)\cdot\frac{d}{dz}Y(z)+Q(z)\cdot Y(z)=0 \qquad (2)$$

за допомогою підстановок:

$$z=z(x),\ Y(z)=m(x)y(x). \qquad (3)$$

для знаходження конкретних виразів підстановок (3) необхідно розв'язати нелінійне диференціальне рівняння третього порядку:

$$2\cdot\frac{d^3}{dz\cdot dx^2}z(x)-3\cdot\left(\frac{d^2}{dzdx}z(x)\right)^2-Z\cdot\frac{d^2}{dx^2}z(x)+X=0,$$

де Z і X – функції змінних z і x, які залежать від коефіцієнтів P і Q рівняння (2) та коефіцієнтів p і q рівняння (1).

У 1837 р французький математик Жозеф Лувілль довів можливість представлення звичайного лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+p(x)\cdot\frac{d}{dx}y(x)+\left(q(x)+\lambda r(x)\right)\cdot y(x)=0 \qquad (4)$$

у вигляді нормальної форми, яка тепер носить його ім'я:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\eta(\xi)+\left(\lambda+\varphi(\xi)\right)\cdot\eta(\xi)=0, \qquad (5)$$

де λ – параметр.

Перехід від рівняння (4) до рівняння (5) здійснюється за допомогою підстановок:

$$\eta(\xi)=\Phi(x)y(x),\quad \xi=\int_a^x\sqrt{r(t)}dt,\quad \Phi(x)=\sqrt[4]{r(x)}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x p(t)dt\right),$$

де $p(x)\in C^1$, $q(x)\in C$, $r(x)\in C^2$, $r(x)>0$.

У роботах російського математика Л.М. Берковича [3], починаючи з 1960-х років, досліджуються питання можливості факторизації диференціальних операторів. Зокрема, в роботі [4] доведено, що для того, щоб рівняння (6) привести до вигляду рівняння (7):

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+a_1(x)\cdot\frac{d}{dx}y(x)+a_0(x)\cdot y(x)=0, \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t)+b_1(t)\cdot\frac{d}{dt}z(t)+b_0(t)\cdot z(t)=0, \quad (7)$$

де $a_k(x), b_k(x)\in C^k$, $k=0;1$,

за допомогою підстановки:

$$z=\upsilon^{-1}(x)\cdot y(x),\ dt=u(x)dx,$$

де $u(x),\upsilon(x)\in C^2$, $u(x)\cdot\upsilon(x)\neq 0$,

необхідно і достатньо, щоб виконувалися співвідношення:

$$\begin{cases} -2\upsilon'\upsilon^{-1}-u'u^{-1}+b_1(t)\cdot u=a_1(x); \\ \upsilon''+a_1(x)\upsilon'+a_0(x)\upsilon-b_0(t)\cdot u^2\upsilon=0. \end{cases} \quad (8)$$

Для окремих випадків значень коефіцієнтів $a_1(x)=0$; $b_1(t)=0$; $b_0(t)=Const$ при розвязанні системи (8) отримують рівняння В.П. Єрмакова, яке ним вперше досліджено в 1880 р під час його роботи в Імператорському Київському університеті Святого Володимира (нині КНУ ім. Т.Г. Шевченка) [5]:

$$\upsilon''+a_0(x)\upsilon-b_0\cdot\upsilon^{-3}=0.$$

У 1950 р Е. Пінні незалежно дослідив властивості цього рівняння, не знаючи про результати свого попередника [6].

Таким чином, для того, щоб знайти вирази замін, які використовуються при приведенні одного звичайного диференціального рівняння до іншого, навіть в лінійному випадку, потрібно розв’язати нелінійне звичайне диференціальне рівняння. Як відомо, отримати аналітичний розв’язок такого рівняння можна в дуже обмеженій кількості випадків.

Література:

6. Kummer E. E. (1834). De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. **100,** 1-9. (reprinted from the Programm des evangelischen Königlichen und Stadtgymnasiums in Liegnitz for the year 1834).
7. Liouville J. (1837). Sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en series don’t les divers termes sont assujettis a satisfaire a une meme equation differentielle du second continent un parametre variable. *Journal Math*. II, 16-35.

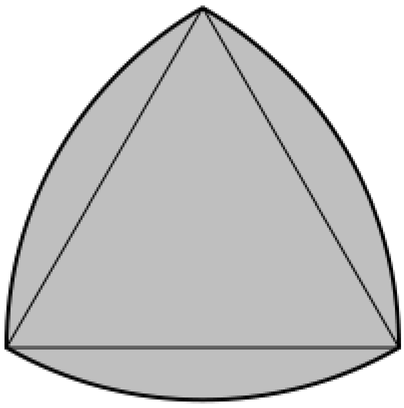
8. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 464 с.
9. Беркович Л.М. О преобразовании дифференциальных уравнений типа Штурма-Лиувилля. Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 42-44.
10. Ермаков В.П. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде. *Университетские известия*. Киев, 1880. № 9. С. 1-25.
11. Pinney E. (1950). The nonlinear differential equation $y'' + p(t)y + c \cdot y^{-3} = 0$. *Proceedings of the American Mathematical Society*. **1**, 581.

І.Ю. Цимбалюк
Національний лісотехнічний університет України
Науковий керівник ***Н.П. Процах****, доктор фізико математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики і фізики*

ТРИКУТНИК РЕЛО: ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

.

Трикутник Рело є найпростішою після кола фігурою сталої ширини.



Це плоска опукла геометрична фігура, яка утворюється перетином трьох однакових кіл радіуса a з центрами, розміщеними у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною a. Число a називають шириною отриманої фігури.

Побудова трикутника Рело за допомогою одного лише циркуля зводиться до послідовного проведення трьох рівних кіл. Центр першого кола можна обрати довільно, центром другого – може бути будь-яка точка першого кола, а центром третього — будь-яка з двох точок перетину перших двох кіл.

Трикутник Рело має наступні *властивості та характеристики*.

- З усіх фігур сталої ширини лише трикутник Рело і коло мають центральну симетрію.
- Трикутник Рело має найменшу площу серед усіх фігур сталої ширини a.
- Через кожну вершину трикутника Рело, на відміну від інших його граничних точок, проходить не одна опорна пряма, а нескінченна множина опорних прямих. Кут між крайніми прямими цього «пучка» називається кутом біля вершини, є найменшим серед усіх фігур сталої ширини і дорівнює 120°.
- Площа трикутника Рело: $S = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$
- Периметр: $p = \pi a$
- Радіус вписаного кола: $r = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a$
- Радіус описаного кола: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Трикутник Рело знайшов своє застосування у багатьох прикладних розробках. Деякі з них наведемо нижче.

В кінці 1940-х Ф.Г. Ванкель придумав схему двигуна без колінчатого вала – приладу який перетворює поступальний рух поршнів в обертання валу мотора. В його двигуні, який назвали роторним, немає циліндрів. Тіло що називається ротором при обертанні постійно торкається стінок камери двигуна, розділяючи робочий простір на три частини. В двигуні Ванкеля ротор в перерізі – трикутник Рело.

Свердло з перерізом у формі трикутника Рело і ріжучими кромками, що збігаються з його вершинами, дозволяє отримувати майже квадратні отвори з прямими сторонами, але закругленими кутами. Однак при обертанні такого свердла його центр не буде залишатися на місці, як це відбувається у випадку традиційних спіральних свердел, а буде описувати криву, що складається з чотирьох дуг еліпсів. Тому патрон, в якому затиснуте свердло, не повинен перешкоджати цьому руху. Дане свердло і патрон до нього запатентував Гаррі Уаттс в 1917 році.

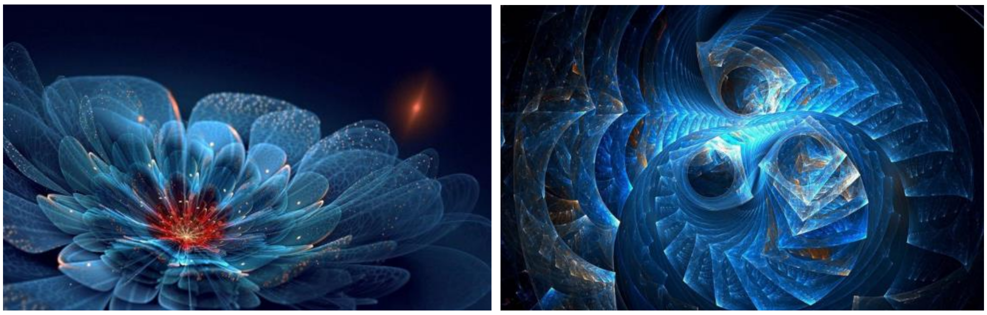
Трикутник Рело використовується в кулачкових механізмах швейних машин для зигзагоподібної строчки. Як кулачок трикутник Рело використовують і німецькі годинникарі мануфактури A.Lange & Sohne в механізмах наручних годинників «Lange 31».

Раніше трикутник Рело використовувався в грейферному механізмі в кінопроекторах.

Шумик О.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

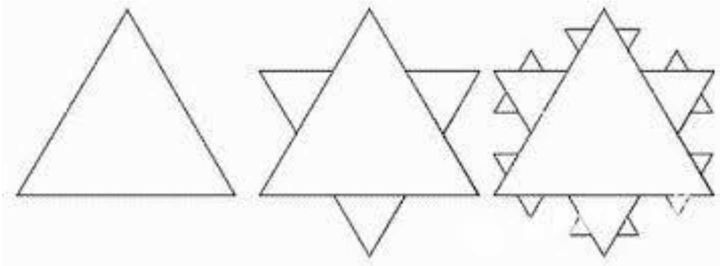
ФРАКТАЛ – КРАСА МАТЕМАТИКИ

У пошуку нового зображення, того, що ми ще не бачили на біґ-бордах, рекламах та флаєрах, програмісти, дизайнери, сучасні художники звернулись до математики, відкривши для себе та світу фрактальну графікою, котру широко використовують.



Мал.1.Фрактальні малюнки

Складне та не зрозуміле, на перший погляд, поняття. Фрактал і фрактальна геометрія, які з'явилися в кінці 70-х, з середини 80-х рр., міцно увійшли у вжиток математиків і програмістів. Слово фрактал утворене від латинського fractus і в перекладі означає "той, що складається з фрагментів". Воно було запропоноване Бенуа Мандельбротом в 1975 році для позначення нерегулярних, проте слабоподібних структур, якими він займався. Найвідомішими фрактальними об'єктами є дерева: від кожної гілки відходять менші, схожі на неї, від них - ще менші. Крім дерев, фрактальними властивостями володіють багато об'єктів живої і неживої природи (кора дерев, цвітна капуста, хмари, сніжинка, за фрактальними алгоритмами ростуть кристали та рослини). Властивість фрактальної графіки - моделювати образи живої природи обчислення - часто використовують для автоматичної генерації незвичних ілюстрацій. Найпростішим фрактальним об'єктом є фрактальний трикутник.



Мал.2 Фрактальні трикутники.

Фрактальна графіка бере свій початок з фрактальної геометрії. Народження фрактальної геометрії прийнято пов'язувати з виходом в 1977 році книги Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature». Фракталом називається структура, що складається з частин, котрі подібні до цілого. Самоподібність – одна з основних властивостей фракталів. Об'єкт називають самоподібним, коли збільшені частини об'єкту схожі на сам об'єкт і один до одного. Фрактальна графіка, як і векторна, заснована на математичних обчисленнях. Однак базовим елементом є математична формула, ніяких об'єктів у пам'яті комп'ютера не зберігається і зображення будується виключно за рівняннями. Фрактальна графіка міститься у пакетах для наукової візуалізації для побудови як найпростіших структур, так і складних ілюстрацій, що імітують природні процеси та тривимірні об'єкти. Існують такі види фракталів: геометричні, алгебраїчні, стохастичні. Побудова фрактального малюнка може відбуватися за деяким алгоритмом або шляхом автоматичної генерації зображень за допомогою обчислень за певними формулами. Зміна в алгоритмах або значень коефіцієнтів у формулах призводить до модифікації зображення. Фрактальну графіку часто використовують для графічного представлення даних під час моделювання деяких процесів, для автоматичної генерації абстрактних зображень, у розважальних програмах. Як і кожна графіка чи програма фрактальна графіка має свої переваги та недоліки.

Переваги фрактальної графіки:

1)Малі обсяги даних.

2)Простота модифікації зображень.

3)Можливість деталізації зображення.

Недоліки фрактальної графіки:

1)Абстрактність зображень.

2)Необхідність використання досить складних математичних понять і формул.

Фрактали широко застосовуються в науці. Найбільш корисним застосування фракталів є у комп'ютерній науці - фрактальне стиснення даних. Фрактали використовуються в нафтохімії при моделюванні пористих матеріалів, в біології для опису внутрішніх органів, в медицині для відображення биття серця, у фізиці при моделюванні нелінійних процесів. Фрактали використовують в комп'ютерних іграх, де рельєфна місцевість, зазвичай, є фрактальним зображенням. Як бачимо з вище переліченого, фрактальна графіка потрібна усюди, тому її розвиток є одним з найважливіших завдань сьогодення.

М.Я. Цимбала
Львівський державний інститут економіки і туризму
Науковий керівник ***Л. Ю. Фірман*** *старший викладач кафедри природничо-математичних наук*

ЖІНОЧЕ ОБЛИЧЧЯ МАТЕМАТИКИ

Протягом століть заняття математикою вважалися нежіночою справою, але, незважаючи на дискримінацію, знайшлося кілька жінок-математиків, які виступили проти усталених звичаїв і порядків , вони закарбували свої імена в історії математики. Через покоління, людство вийшло на новий етап розвитку науки та усвідомило, що праця жінок цінується на рівні із чоловічою. Жінки у цьому напрямку створили наукові праці та підручники , які збагатили скарбницю світової математичної літератури.

Серед жінок-математиків найбільш відомими постають перед нами Гіпатія Олександрійська, Софія Яновська, Софія Ковалевська.

Здібна і талановита жінка-математик Гіпатія Олександрійська, талант якої безжалісно знищили. Вона народилася і жила в Олександрії в 370-415рр. Гіпатія була першою жінкою-математиком, філософом, астрономом і лікарем. Вона була всебічно освіченою, що на її думку зважали всі вчені того часу. Блискучі здібності Гіпатії не залишились непоміченими. Їй була запропонована кафедра філософії в Олександрії, де і почалась її наукова діяльність. Вже цей факт сам по собі був неймовірним. Жінка на чолі кафедри! Але, мабуть, її талант був такий яскравий, що вчені мужі зважились запропонувати їй суто «чоловічий пост». Ті уривчасті відомості про Гіпатію, які дійшли до нас, свідчать про те, що за своїми філософськими поглядами вона була послідовницею Платона, займалась тлумаченням його творів, а також творів Аристотеля. Гіпатія Олександрійська діяльно поширювала неоплатонівські погляди, а також написала коментарі до праць Діофанта і Аполлонія. Проте, наукові праці Гіпатії не збереглися. На жаль, доля Гіпатії трагічна. Її вбили одного березневого дня 415 року , вдень на одній з центральних вулиць

Олександрії, вбили по звірячому на очах у багатьох жителів стародавнього міста. Невинне тіло неймовірно талановитої жінки спалили на багатті .

Великий слід по собі залишила професор Софія Олександрівна Яновська (1896-1966 рр.) - видатний російський математик; перша у світі жінка-професор і член кореспондент Петербурзької академії наук. Софія була професором механіко-математичного факультету МДУ , її ім'я міцно врізалося в пам'ять всіх тих, хто в нашій країні пов'язаний з логікою та історією. Про Яновську і її внесок у науку написано не так багато. До 70-річчя Софії Олександрівни була опублікована стаття про неї в журналі «Успіхи математичних наук», а після її смерті – ряд некрологів . У 1970 році учень Яновської філософ Д.П.Горський помістив роботу про неї в одному логіко-філософському збірнику. На початку 1980 р. добірка ряду невеликих статей –спогадів про неї з'явилася у збірнику «Жінки-революціонери і вчені». Яновська створила новий напрям у науці - свою школу методології наукового знання. Вона поєднувала теоретичний пошук з пропагандою наукових знань, викладання спеціальних питань математичної логіки - з установкою на те, щоб зробити досягнення науки надбанням широкої аудиторії, включаючи школярів. Читала на трьох західноєвропейських мовах, завжди знала про нові результати у світовій логічної науці. Вона була ініціатором переказу фундаментальних логічних праць зарубіжних авторів. редагувала їх, писала до них передмови, коментарі. Яновська вчилася все життя, йшла в пізнанні весь час вперед. І вона завжди була готова до смерті і працювала, знаючи, що завтра її може не стати. Воля, терпіння і сила духу в ній були незвичайні.

Софія Василівна Ковалевська (1850-1891 рр.) видатний російський математик; перша жінка у світі жінка-професор і член- кореспондент Петербурзької академії наук. Софія Василівна довела теорему диференціальних рівнянь до частинних похідних, яка в наш час носить ім'я Коші-Ковалевської; дослідила складні теореми математичного аналізу; пояснила закон механіки про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки; доповнила роботу Лапласа з дослідження структури кілець Сатурна. Вона автор художніх творів «Спогади дитинства», «Нігілістика». Лауреат премії Бордена Паризької академії наук. Найбільш важливі дослідження відносяться до теорії обертання твердого тіла. Ковалевська відкрила третій класичний випадок розв'язання задачі про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Цим просунула вперед рішення задачі, розпочатої Леонардом Ейлером і Ж. Л. Лагранжем. Довела існування аналітичного (голоморфних) рішення задачі Коші для систем диференціальних рівнянь з приватними похідними, досліджувала завдання Лапласа про рівновагу кільця Сатурна, отримала друге наближення.

Важким і часом небезпечним було життя і наукова діяльність жінок-математиків, які своєю працею, наполегливістю і завзятістю завоювали всесвітне визнання нарівні з чоловіками- математиками. Їх імена не можна забувати. Ці люди віддали своє життя науці. Заради нас, заради своїх нащадків . Тому наш обов'язок - пам'ятати їх і продовжувати їхню справу. Особливо це стосується жінок - математиків. Вся їх діяльність - це життєвий подвиг.

Література

1. https://travel-in-time.org/uk/tsikavi-istorichni-postati/gipatiya-i-oleksandriyska-tragediya.

2. https://dovidka.biz.ua/sofiya-kovalevska-biografiya-skorocheno.

ЗМІСТ